4 次元ゲージ理論と滑らかな位相

Donaldson 理論から Seiberg-Witten 理論へ

目次

序論 1
Part I　分類問題の衝突 3
　第 1 章　同じ位相、違う滑らかさとは何か 3
　第 2 章　4 次元の代数的影：交点形式 7
　第 3 章　Freedman と Donaldson の衝突 16
Part II　4 次元の方程式 18
　第 4 章　接続・曲率・ゲージ変換を作り直す 18
　第 5 章　なぜ 4 次元なのか 24
　第 6 章　Yang–Mills エネルギーと ASD 方程式 28
Part III　モジュライ空間の局所構造 31
　第 7 章　なぜゲージで割るのか 31
　第 8 章　線形化すると複体が現れる 35
　第 9 章　楕円性と指数が次元になるまで 38
　第 10 章　滑らかなモジュライ空間を作る 42
Part IV　コンパクト化と Donaldson 理論 45
　第 11 章　コンパクト性が壊れる仕方：バブリング 45
　第 12 章　PDE 解空間から数を取り出す一般原理 48
　第 13 章　Donaldson の二つの出力 55
　第 14 章　位相分類と滑らかな分類を照合する 63
Part V　Seiberg-Witten 理論 68
　第 15 章　なぜスピノルが必要になるのか 68
　第 16 章　Seiberg–Witten 方程式とモジュライ空間 73
　第 17 章　SW 不変量と Donaldson 理論の比較 78
Part VI　幾何への帰還 81
　第 18 章　Kähler・シンプレクティック 4 次元多様体 81
付録 A　解析の道具箱 89
付録 B　記号・用語・演習と解答 95
参考文献 103

序論

この本が答える問い

楕円型ゲージ方程式の解空間は、なぜ 4 次元多様体の滑らかな構造を検出できるのか。

答えは「Donaldson 不変量や Seiberg–Witten 不変量を定義できるから」では終わらない。本書は、交点形式という位相的入力が、4 次元の Hodge 分解、Yang–Mills エネルギー、ゲージ商、楕円型変形複体、指数、正則性、コンパクト化、符号付き数え上げを経て滑らかな不変量へ変わるまでを一段ずつ組み立てる。

読者に仮定するのは、線形代数、1 変数・多変数の微積分、基礎的な常微分方程式と偏微分方程式である。位相空間、多様体、微分形式、ホモロジー、束、接続、スピノルは既知としない。これらは必要になる場所で、円周・球面・トーラス・メビウスの帯・回転する基底などの例から導入する。

本書は数学科の専門講義を履修済みであることを前提にしない。大学位相、ホモロジー、コホモロジー、微分形式、主束、Hodge 理論、Sobolev 空間、Fredholm 作用素、Spin^{c}構造、Kähler 幾何、Taubes 理論は、すべて本文または付録で必要な範囲を導入してから使う。Freedman 分類、Donaldson の貼り合わせ、Atiyah–Singer 指数定理、Uhlenbeck コンパクト性、Taubes の定理のような研究級結果は完全証明しないが、仮定、結論、本書で使う出力、その後の手計算を分けて示す。

読み方は一通りではない。初読では「手で計算できる模型」と「引用定理の入力・出力」を区別して進めればよい。式が重い箇所で止まったときは、付録 B の演習解答と付録 A の解析道具へ戻る。重要な概念は、定義だけでなく、最小例、途中計算、使ってはいけない範囲、後続章での再利用を本文中で回収する。

構成

- **第 I 部　分類問題の衝突**: 多様体と滑らかな構造、穴を測る方法、交点形式、Freedman と Donaldson。
- **第 II 部　4 次元の方程式**: 束、接続、曲率、Hodge 分解、Yang–Mills と反自己双対方程式。
- **第 III 部　モジュライ空間の局所構造**: ゲージ商、変形複体、楕円性、指数、横断性。
- **第 IV 部　コンパクト化と Donaldson 理論**: 曲率集中、不変量生成、対角化定理、多項式不変量、異種滑らかな構造。
- **第 V 部　Seiberg–Witten 理論**: 回転とスピノル、Spin^{c}構造、連成方程式、Donaldson 理論との比較。
- **第 VI 部　幾何への帰還**: Kähler 幾何とシンプレクティック幾何、Taubes の定理、随伴不等式。

読み方

第 1 章から順に読むことを基本とする。各章は「直前までに分かったこと」「この章で生じる問い」「手で計算できる模型」「定義と導出」「次章へ残る問題」の順に進む。関数解析は付録だけへ追いやらず、必要になる第 7 章以降で有限次元模型とともに導入し、付録 A で証明上の道具をまとめ直す。本文中の深い結果は、完全証明、本質的証明、証明の骨格、引用定理の四段階を区別し、引用定理でも仮定・結論・難所・用途を明示する。

式の規約は全章で固定する。特に $F_A^+ = 0$ を ASD、$\mathrm{YM}(A) = \| F_A \|_{L^2}^2$ と呼び、向き反転時には自己双対成分と反自己双対成分（文献語では self-dual と anti-self-dual）が交換される。

到達点

読み終えたとき、読者は次を説明できることを目標とする。

1. なぜ 4 次元で曲率 2 形式・交点形式・臨界尺度が重なるか。
2. 方程式の本数ではなく楕円複体がモジュライ空間を有限次元化する理由。
3. 指数と実際の次元、局所的な滑らかさとコンパクト性の違い。
4. Freedman 分類、Donaldson 対角化、多項式不変量、異種滑らかな構造の組の論理的役割。
5. Seiberg–Witten 理論が Donaldson 理論と共有する機械と異なる解析。
6. ゲージ不変量がシンプレクティック曲線・最小種数・スカラー曲率へ制約を返す仕組み。

証明と引用の読み分け

本文では次の表示を用いる。

- **深度 A**: 必要な計算と証明を本文内で完結させる。
- **深度 B**: 核心を証明し、解析的な標準補題だけを明示して借りる。
- **深度 C**: 定理の仮定・結論に加え、証明を構成する主要補題、難所、論理順序を示す。
- **深度 D**: 本書の前提を大きく越える定理として、正確な版と本書で使う帰結を出典付きで引用する。

「引用」は「理由を説明しない」という意味ではない。どの入力を定理へ渡し、どの出力を次の議論で使うかは本文で追跡する。

Part I　分類問題の衝突

第 1 章　同じ位相、違う滑らかさとは何か

この章の出発点

この章では、読者が知っている微積分を「曲がった空間」へ運ぶところから始める。多様体、座標近傍、アトラスを既知とはしない。英語の専門語は検索の手掛かりとして初出に添えるが、以後は日本語を用いる。

まず三つの「同じ」を区別する。

- **同相**（homeomorphic）：連続変形の立場で同じである。
- **微分同相**（diffeomorphic）：微分できる構造まで含めて同じである。
- **等長**（isometric）：さらに長さや角度まで同じである。

後ろへ行くほど条件が強い。等長なら微分同相であり、微分同相なら同相であるが、逆は一般には成り立たない。本書の中心問題は、二番目と一番目の間に 4 次元特有の隔たりがあることから始まる。

位相空間とは何か

実数直線では、点 x の「十分近く」を開区間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ で表す。この近さの情報だけを抽象化したものが**位相**である。集合 X の部分集合族 $\mathcal{T}$ が次を満たすとき、$(X, \mathcal{T})$ を位相空間と呼ぶ。

1. $\varnothing$ と X は $\mathcal{T}$ に属する。
2. $\mathcal{T}$ の要素をいくつ集めて和集合を取っても $\mathcal{T}$ に属する。
3. $\mathcal{T}$ の要素を有限個集めて共通部分を取っても $\mathcal{T}$ に属する。

$\mathcal{T}$ の要素を開集合と呼ぶ。写像 $f : X \to Y$ が連続であるとは、Y の任意の開集合 V に対して逆像 $f^{-1}(V)$ が X の開集合になることをいう。連続な全単射で逆写像も連続なものが**同相写像**である。

例えば円周 S^1 と正方形の周は同相である。正方形の角は尖って見えるが、位相は角度を測らない。一方、円周と閉区間 $[0,1]$ は同相でない。区間の内部から一点を除くと二つに分かれるが、円周から一点を除いてもつながったままだからである。このように、同相写像は「穴の数」や「切れ方」を保つ。

局所座標から多様体を作る

地球全体を一枚の平面地図でゆがみなく表せなくても、町の周辺なら緯度・経度のような二つの数で表せる。この考えを定義にする。

X の開集合 U と、$\mathbb{R}^n$ の開集合 V の間の同相写像

$$\varphi : U \to V$$

を**座標近傍**または**チャート**と呼ぶ。各点が少なくとも一つのチャートに入る位相空間を、通常の分離性・可算性の条件も満たすとき、n 次元**位相多様体**という。ここで n は、各点の近くを記述するのに必要な実数の個数である。

円周 S^1 を例にする。一点を除いた円周は開区間へほどけるので、一つのチャートで表せる。しかし円周全体を一つの実数座標で表すと切れ目ができる。そこで異なる点を除いた二つ以上のチャートを重ねる。チャート (U, φ) と (W, ψ) が重なる場所では、同じ点の二つの座標表示を比較する写像

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap W) \to \psi(U \cap W)$$

が現れる。これを**座標変換**という。

具体式で見る。$S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ とし、北極 $N = (0,1)$、南極 $S = (0,-1)$ を除いた

$$U_N = S^1 \setminus \{N\}, \qquad U_S = S^1 \setminus \{S\}$$

を取る。北極からの立体射影を

$$\varphi_N(x,y) = \frac{x}{1-y} : U_N \to \mathbb{R}$$

とし、南極からの立体射影を

$$\varphi_S(x,y) = \frac{x}{1+y} : U_S \to \mathbb{R}$$

とする。逆写像はそれぞれ

$$t \mapsto \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right), \qquad u \mapsto \left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{1-u^2}{u^2+1} \right)$$

である。重なり $U_N \cap U_S$ は円周から二点を除いた部分なので、座標では $t \neq 0$、$u \neq 0$ に対応する。両方の式を比べると

$$u = \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(t) = \frac{1}{t}$$

となる。これは $t \neq 0$ 上の滑らかな関数で、逆も同じ式で滑らかである。したがってこの二枚のチャートは滑らかに両立する。

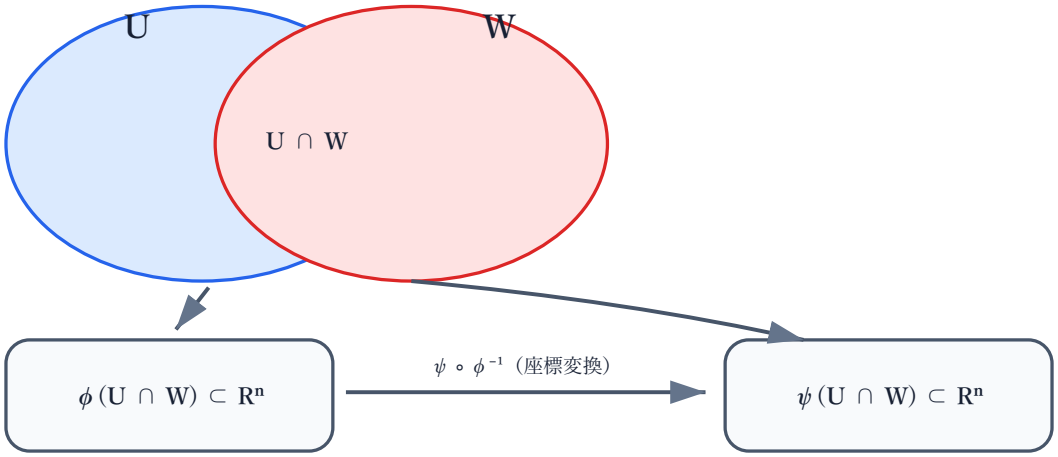


図 1: 二つの座標近傍は多様体上で重なり、その重なりを二つのユークリッド空間へ写した間に座標変換が定まる。

図 1 で座標変換の定義域が $\varphi(U \cap W)$ であることに注意する。$\varphi(U)$ 全体から $\psi(W)$ 全体への写像ではない。同じ点を両方の地図で表せる重なり上だけで、二つの数値表示を比較する。

「滑らか」を大域的に定める

多様体上で微分するには、座標変換が微分を壊さない必要がある。重なり上の全ての座標変換が C^∞ 級、すなわち何回でも微分可能であるチャートの集まりを**滑らかなアトラス**という。互いに滑らかに両立するチャートを全て加えたものが**滑らかな構造**である。

ここで重要なのは、滑らかな構造が「一枚の好みの地図」ではないことである。同じ滑らかな構造の中では、極座標と直交座標のように座標表示を替えてよい。重なりで座標変換が滑らかなら、どちらで計算しても同じ微分可能性を表している。

具体例として、実数直線上で $y = x^3$ を新しい座標だと思うと、写像 $x \mapsto x^3$ 自体は連続な全単射で逆も連続なので同相写像である。しかし逆変換 $x = y^{1/3}$ は $y = 0$ で微分可能でない。この一枚だけを見れば「座標を替えただけ」に見えるが、通常の座標とは滑らかに両立しない。ここで起きているのは「同じ位相空間上で、通常の座標系と両立しない別の座標を入れた」という局所的な模型である。4 次元で問題になる異種

滑らかな構造は、これを大域的な多様体全体で比較する問題であり、単一の写像が同相だが微分同相でないという事実だけとは区別して読む必要がある。

二つの滑らかな多様体 X, Y の写像 $f : X \to Y$ が滑らかであるとは、任意の座標表示 φ, ψ の下で

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

が通常の多変数関数として滑らかであることをいう。f が全単射で、f と f^{-1} がともに滑らかなとき、f を**微分同相写像**という。

> **節内演習 1：同相と微分同相**
>
> 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ は同相写像であることを確かめよ。また通常の滑らかな構造に関して微分同相写像でない理由を述べよ。
>
> **解答。** f は連続な狭義単調全単射で、逆写像 $y \mapsto y^{1/3}$ も連続なので同相写像である。しかし逆写像の導関数は $y = 0$ で有限値を持たないため、逆写像は滑らかでない。したがって微分同相写像ではない。

地図だけでは微分できない

球面をゴムの膜として連続に変形しても、球面であることは変わらない。位相幾何が保存するのは、この「切らず貼らずに変形できる」という情報である。しかしゲージ理論で扱う接続、曲率、ホッジ作用素、偏微分方程式は微分を要求する。同じ点集合と同じ位相を持つ二つの多様体でも、どの関数を滑らかと認めるかが異なれば、同じ微分方程式を書けるとは限らない。

位相多様体 X 上の**滑らかな構造**とは、座標変換が C^∞ 級になるアトラスの極大同値類である。二つの滑らかな構造が同じとは、恒等写像が滑らかという意味ではなく、両者の間に微分同相写像が存在するという意味である。したがって比較すべき三段階は明確に異なる。

1. 位相空間として同相か。
2. 滑らかな構造を少なくとも一つ持つか。
3. 二つの滑らかな構造は微分同相か。

第 2 問が否定なら「非平滑化可能」であり、第 3 問が否定なら同じ位相多様体上の**エキゾチックな滑らかな構造**である。後者を示すには、同相写像の存在と微分同相写像の不存在を別々に証明しなければならない。

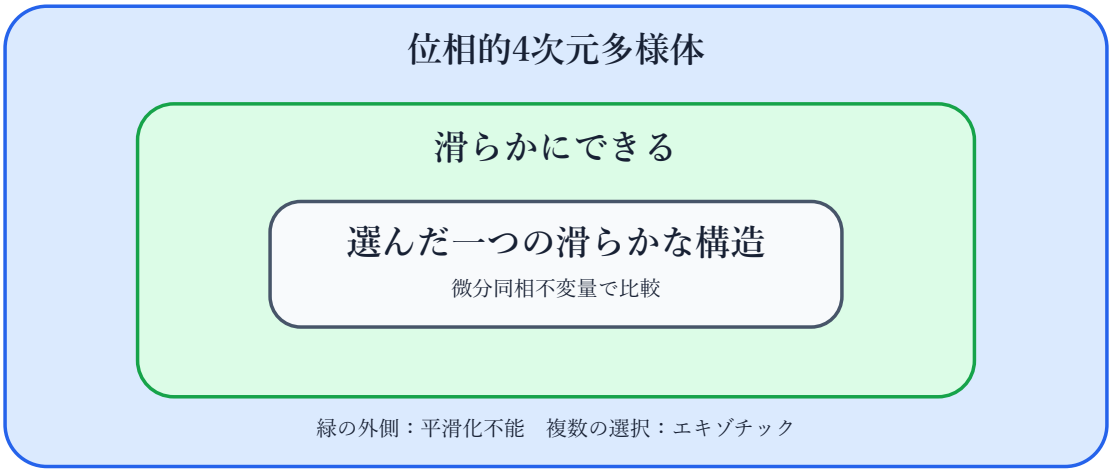


図 2: 位相的構造と滑らかな構造を混同しないための関係図。

何が「同じ」なら同じ滑らかさか

読者が最初に混乱しやすい点は、同じ位相空間上に二つの滑らかなアトラスがあるとき、恒等写像で比較しなければならないと思ってしまうことである。そうではない。滑らかな構造の同一性は、ある同相写像

$$f : (X, \mathcal{S}_0) \to (X, \mathcal{S}_1)$$

が両向きに滑らか、つまり微分同相写像になるかどうかで判定する。恒等写像が滑らかでなくても、別の写像が微分同相写像なら、二つの滑らかな構造は同じと見る。

したがって異種滑らかな構造を示すには、次の二段階が必要である。

1. 位相的には同じ対象であることを示す。
2. どの同相写像を選んでも微分同相写像にはならないことを示す。

第二段階は直接調べにくい。そこで微分同相写像で保存される量を作り、その値が異なることを示す。ゲージ理論の役割はここにある。

比較の順序を間違えると何が破綻するか

ここで、よくある誤った証明を一つ見ておく。二つの滑らかな多様体 X_0, X_1 に対し、あるゲージ不変量の値が違うことが分かったとする。この事実だけから言えるのは

$$X_0 \underset{\text{diff}}{\ncong} X_1$$

である。まだ

$$X_0 \underset{\text{homeo}}{\cong} X_1$$

は言えていない。したがって、これだけでは「同じ位相多様体上の異なる滑らかな構造」とは言えない。単に別の位相多様体を区別しただけかもしれない。

逆に、Freedman 型の分類で X_0 と X_1 が同相だと分かったとしても、それだけでは異種滑らかな構造とは言えない。微分同相である可能性が残るからである。したがって異種滑らかな構造の証明は、必ず次の形を持つ。

> 位相的データを照合する
> → 同相写像を得る
> → 滑らかな不変量を比較する
> → 微分同相写像を否定する

この順序は以後何度も出てくる。読者が「どちらの圏の主張をしているのか」を見失わないことが、4 次元トポロジーを読む最初の安全装置である。

なぜ 4 次元だけが難しいのか

低次元では位相構造と滑らかな構造が強く結びつき、高次元では手術理論が働く。4 次元では、局所的には $\mathbb{R}^4$ に見えるという条件と、大域的な貼り合わせを滑らかに制御する条件の間に特有のずれが生じる。ここで重要なのは「4 次元は不思議だ」という標語ではない。後で二つの具体的な機構が同時に現れる。

- 中間次元が 2 なので、2 次元サイクル同士の交点が数になり、交点形式を作る。
- 2 形式に対するホッジ作用素が再び 2 形式へ戻るので、曲率方程式を自己双対・反自己双対に分けられる。

前者は位相的な入力、後者は解析的な入力である。教材全体の中心は、この二つが同じ整数を介して接続することにある。

何を観測量にすればよいか

滑らかな構造を直接一覧にすることは難しい。そこで、滑らかな構造が与えられたときだけ定義でき、微分同相写像では変わらない量を作る。その量が二つの構造で異なれば、両者は微分同相ではない。

ゲージ理論の戦略は次の通りである。多様体 X の上に主束 P を置き、接続 A に楕円型方程式を課す。解を座標表示の冗長性であるゲージ変換で割り、有限次元のモジュライ空間を作る。その向き付けられた交点数や積分から整数・多項式を得る。補助計量を変えても値が変わらないことを示せれば、それは滑らかな不変量になる。

この説明にはまだ空白が多い。なぜ解空間は有限次元なのか、なぜコンパクト性が成り立つのか、数え上げが補助計量に依存しないのかは、どれも自動ではない。以後の章はこの空白を順に埋める。

ここで大事なのは、ゲージ理論が滑らかな構造そのものを「見る」のではないという点である。見るのは、滑らかな構造が許す微分方程式の解空間である。滑らかな構造が変わると、接続、曲率、ホッジ作用素、楕円作用素の意味が変わり、その結果としてモジュライ空間の数え上げが変わりうる。

観測量の条件

滑らかな不変量として使える量には、最低限三つの条件がある。

第一に、定義が滑らかな圏に依存している必要がある。単なるホモロジーや交点形式だけでは、同相写像で保存されるため、同じ位相型の中の滑らかな構造の違いを検出できない。

第二に、微分同相写像で保存されなければならない。座標や計量を選んで作った量が、その選択に依存したままなら、不変量ではなく補助データの測定値にすぎない。

第三に、実際に計算または比較できなければならない。非常に抽象的に存在するだけの不変量では、具体的な多様体の滑らかさを区別できない。Donaldson 理論が重く、Seiberg–Witten 理論が急速に使われた理由の一つは、この第三条件に関係する。

以後、各章で作る道具はこの三条件に照らして読むとよい。接続と曲率は滑らかな依存性を与え、モジュライ空間の不変性証明は微分同相写像不変性を与え、具体的な指数やコンパクト性は計算可能性を支える。

最初に残る問い

解析へ急ぐ前に、ゲージ理論が区別すべき位相的データを知る必要がある。4 次元で 2 次元サイクル同士を交差させると整数が出る。この整数を双線形形式として束ねた交点形式は、なぜ分類問題の中心になるのだろうか。

第 2 章　4 次元の代数的影：交点形式

穴を数えるための準備

前章では、多様体の局所座標と滑らかな構造を導入した。本章では「多様体の中にどのような輪や曲面が残るか」を整数で記録する。交点形式を定義する前に、ホモロジーとコホモロジーを具体例から組み立てる。

チェイン、境界、サイクル

多様体を三角形や四面体などの単純な部品に分けたと考える。向きを付けた k 次元の部品を整数係数で形式的に足したものを **k-チェイン**という。チェイン全体を $C_k(X;\mathbb{Z})$ と書く。

向き付き線分 $[v_0v_1]$ の境界は

$$\partial [v_0v_1] = [v_1] - [v_0]$$

である。向き付き三角形なら

$$\partial [v_0v_1v_2] = [v_1v_2] - [v_0v_2] + [v_0v_1].$$

もう一度境界を取ると各頂点が反対符号で二度現れ、$\partial^2 = 0$ になる。境界を持たないチェイン、すなわち $\partial z = 0$ を満たすものを**サイクル**と呼ぶ。何かの境界 $z = \partial c$ になっているサイクルは、その内部を埋められるので大域的な穴を表さない。そこで

$$H_k(X;\mathbb{Z}) = \frac{\ker(\partial : C_k \to C_{k-1})}{\operatorname{im}(\partial : C_{k+1} \to C_k)}$$

を k 次**ホモロジー群**という。「閉じているもの」を「中身を持つ境界」で同一視した群である。

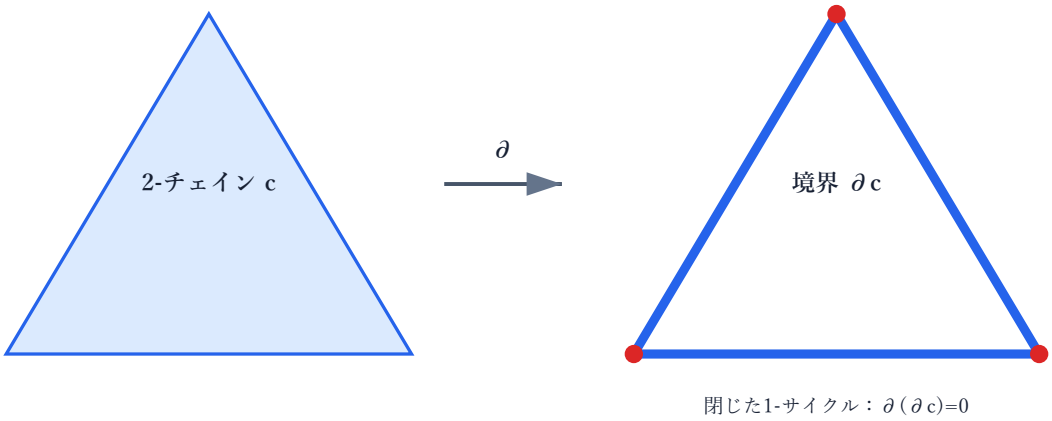


図 3: 向き付き三角形を 2-チェインとみなし、その境界が閉じた 1-サイクルになる。境界をもう一度取ると頂点が相殺する。

図 3 の三角形の周はサイクルだが、この三角形を含む空間では 2-チェインの境界でもある。したがってホモロジー類としては 0 になる。同じ形の閉曲線でも、それを埋める 2-チェインが空間内にあるかどうかが「穴」の有無を分ける。

境界写像を行列で計算する

後の章では ker、im、coker という線形代数の言葉が、変形複体や楕円作用素の有限次元性を読むために繰り返し出てくる。そこで、最初に一つだけ完全に計算しておく。

円周を一つの頂点 v と一つの向き付き辺 e で作るセル分割を考える。辺 e は始点も終点も同じ頂点 v へ戻るので

$$\partial e = v - v = 0.$$

従って $C_1 \cong \mathbb{Z}\langle e\rangle$、$C_0 \cong \mathbb{Z}\langle v\rangle$ に対して、境界写像 $\partial_1 : C_1 \to C_0$ は 1×1 の零行列である。さらに $C_2 = 0$ だから $\operatorname{im} \partial_2 = 0$ であり、

$$H_1(S^1;\mathbb{Z}) = \ker \partial_1 / \operatorname{im} \partial_2 = \mathbb{Z}/0 \cong \mathbb{Z}.$$

一方、区間 $I = [0,1]$ を二つの頂点 v_0, v_1 と一つの辺 e で作ると

$$\partial e = v_1 - v_0.$$

基底を (e)、(v_0, v_1) と取れば、境界写像は列ベクトル

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。この核は 0 なので $H_1(I;\mathbb{Z}) = 0$ である。円周と区間はどちらも「一本の辺」に見えるが、境界行列が違うため、円周だけが一次元の穴を持つ。この小計算が、後で「核は方程式を満たす変形、像は見かけの変形、商が本当の変形」という読み方の原型になる。

円周、球面、トーラス

円周 S^1 を一周する向き付きの道は境界を持たない。しかし円周の中にはその道を埋める円板がないので、境界ではない。この一周が $H_1(S^1;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元になる。$m \in \mathbb{Z}$ は向きを考えて m 周することを表す。

二次元球面 S^2 では、閉じた道は球面上で円板に縮められるので $H_1(S^2;\mathbb{Z})=0$ である。一方、球面全体は境界を持たない二次元サイクルであり、$H_2(S^2;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ を与える。

トーラス $T^2=S^1\times S^1$ には、経線と緯線という独立な二つの一周がある。このため

$$H_1(T^2;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z},\qquad H_2(T^2;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}.$$

この結果は、標準的な CW 分割でも検算できる。正方形の向かい合う辺を貼り合わせてトーラスを作ると、0 セルは一つ v、1 セルは二つ a,b、2 セルは一つ f である。境界写像は

$$C_2=\mathbb{Z}\langle f\rangle\xrightarrow{\partial_2}C_1=\mathbb{Z}\langle a,b\rangle\xrightarrow{\partial_1}C_0=\mathbb{Z}\langle v\rangle$$

で、$\partial_1 a=\partial_1 b=0$ である。2 セルの境界は正方形の周

$$\partial f=a+b-a-b=0$$

になる。したがって $\ker\partial_1=C_1$、$\operatorname{im}\partial_2=0$ であり、

$$H_1(T^2;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}\langle a,b\rangle\cong\mathbb{Z}^2,\qquad H_2(T^2;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}\langle f\rangle$$

を得る。ここで 1 セルは一本ではなく二本である。一本にしてしまうと、経線と緯線を別々に検出できず、後で境界 3 トーラスの三つの生成元を読むときにも誤りが連鎖する。

整数 $m\neq0$ を掛けるとゼロになるホモロジー類を**ねじれ元**と呼ぶ。ねじれ元全体を Tor と書く。交点形式は整数値の双線形形式として扱うため、後では $H_2(X;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}$、すなわちねじれを除いた自由部分を用いる。

接ベクトルと余接ベクトルを先に用意する

次に微分形式を使うが、その前に「ベクトルを入れて数を返す」という言葉の意味を決めておく。多様体上の点 p を通る曲線 $\gamma(t)$ を取り、$\gamma(0)=p$ とする。座標で見た速度

$$\gamma'(0)=\left(\frac{dx^1(\gamma(t))}{dt},\dots,\frac{dx^n(\gamma(t))}{dt}\right)_{t=0}$$

が同じ曲線同士を同一視すると、点 p での速度の集まりが接空間 T_pX になる。座標を一つ選べば

$$v=v^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+v^n\frac{\partial}{\partial x^n}$$

と書ける。ここで $\partial/\partial x^i$ は座標方向の速度を表す基底である。

接空間 T_pX 上の線形関数全体を余接空間 T_p^*X という。座標微分 dx^i は

$$dx^i\!\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta^i_j$$

を満たす余接基底である。したがって、1 形式とは各点で余接ベクトルを滑らかに選んだもの、つまり接ベクトルを一つ入れて数を返す道具である。この段階では接束の一般論をまだ使わない。必要なのは、dx,dy が「座標成分を読む線形関数」であり、曲線や曲面上で積分できるという事実である。

微分形式と積分

多変数微積分の dx,dy を座標に依らない形へ一般化したものが**微分形式**である。点 p で接ベクトルを一つ入れて数を返す線形写像が 1 形式、接ベクトルを二つ入れて交代的な数を返すものが 2 形式である。

1 形式 α,β から作る外積 $\alpha\wedge\beta$ は

$$(\alpha\wedge\beta)(v,w)=\alpha(v)\beta(w)-\alpha(w)\beta(v)$$

で定義される。従って $\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha$ であり、特に $dx\wedge dx=0$ である。$dx\wedge dy$ は向き付き面積を測る。

外微分 d は関数 f を df へ送り、積の規則

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$$

と $d^2 = 0$ を満たす。微積分学の基本定理、Green の定理、Gauss の定理は、まとめて **Stokes の定理**

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

と書ける。

$d\omega = 0$ を満たす形式を閉形式、$\omega = d\eta$ と書ける形式を完全形式という。$d^2 = 0$ なので完全形式は必ず閉形式である。閉形式を完全形式で割ったもの

$$H^k_{\mathrm{dR}}(X) = \frac{\ker(d : \Omega^k \to \Omega^{k+1})}{\mathrm{im}(d : \Omega^{k-1} \to \Omega^k)}$$

が**ド・ラームコホモロジー**である。円周上の角度 1 形式 $d\theta$ は局所的には微分だが、円周全体で一価な角度関数の微分にはならない。実際、$\int_{S^1} d\theta = 2\pi$ なので、Stokes の定理から完全形式ではありえない。これが「穴」を微分形式で検出する最初の例である。

コチェインと余境界

整数係数のコホモロジーを、微分形式だけでなくチェインの双対としても見ておく。k-チェイン群 $C_k(X;\mathbb{Z})$ から整数への準同型

$$\varphi : C_k(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

を **k-コチェイン** と呼び、全体を

$$C^k(X;\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(C_k(X;\mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

と書く。コチェインは「k 次元の部品を測る測定器」である。境界写像 $\partial : C_k \to C_{k-1}$ があると、向きを逆にたどって

$$\delta : C^{k-1} \to C^k, \qquad (\delta\psi)(c) = \psi(\partial c)$$

を定められる。これを余境界という。$\partial^2 = 0$ から $\delta^2 = 0$ が従うので、

$$H^k(X;\mathbb{Z}) = \frac{\ker(\delta : C^k \to C^{k+1})}{\mathrm{im}(\delta : C^{k-1} \to C^k)}$$

が定義できる。ここでも「閉じた測定器」を「一つ低い次元から来る見かけの測定器」で割っている。

円周の一頂点一辺のセル分割では、$\partial_1 = 0$ だった。双対側でも $\delta^0 = 0$ なので、辺 e に 1 を返す 1-コチェインは余境界ではない。したがって

$$H^1(S^1;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

を得る。これは「円周を一周するサイクルを何回横切るか」を測る整数である。

カップ積をトーラスで見る

コホモロジーには、二つの測定器を組み合わせて高い次元の測定器を作る積がある。これが**カップ積**である。一般の単体公式は少し記号が多いので、まずトーラスで意味を確認する。

トーラスを

$$T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$$

と書き、座標を x, y とする。dx, dy は商空間上で大域的な閉 1 形式を定める。基本領域 $[0,1]\times[0,1]$ で正規化すると

$$\int_{S^1_x} dx = 1, \qquad \int_{S^1_y} dy = 1,$$

であり、逆の組み合わせは 0 である。さらに

$$\int_{T^2} dx \wedge dy = \int_0^1 \int_0^1 dx\, dy = 1.$$

従って、$[dx] \smile [dy]$ に対応する実係数コホモロジー類は、トーラス全体の基本類で評価すると 1 を返す。これは経線と緯線が符号付きに一度交わることと同じ情報である。

ここで注意がある。dx, dy は実係数のド・ラームコホモロジーの代表であり、整数係数のカップ積そのものではない。しかし、この例では周期を整数に正規化しているため、整数コホモロジーの生成元を実係数へ送ったものとして読める。以後、交点形式を

$$\langle \mathrm{PD}(x) \smile \mathrm{PD}(y), [X] \rangle$$

と書くときも、背後には「サイクルを測るコチェインを掛け、基本類で評価する」という操作がある。

同じ計算を「線積分から面積分へ」と連続して追うと、双対性の意味がさらに見える。ここで二つの双対を混同しない。第一は、サイクルにコホモロジー類を評価する Kronecker 評価である。$a = S^1_x \times \{\mathrm{pt}\}$、$b = \{\mathrm{pt}\} \times S^1_y$ とし、向きを $dx \wedge dy$ が正になるように固定する。このとき

$$\langle [dx], a \rangle = \int_a dx = 1, \quad \langle [dx], b \rangle = 0,$$

$$\langle [dy], a \rangle = 0, \quad \langle [dy], b \rangle = \int_b dy = 1.$$

したがって $[dx]$ は「a を測る」1 次コホモロジー類で、$[dy]$ は「b を測る」1 次コホモロジー類である。しかし、これはポアンカレ双対そのものではない。ポアンカレ双対 $\mathrm{PD}(a)$ は、任意の 1 サイクル z に対し

$$\langle \mathrm{PD}(a), z \rangle = a \cdot z$$

を満たす類である。交点の向きを $a \cdot b = +1$ とするなら、$a \cdot a = 0$、$a \cdot b = 1$ だから

$$\mathrm{PD}(a) = [dy].$$

一方、$b \cdot a = -1$、$b \cdot b = 0$ なので

$$\mathrm{PD}(b) = -[dx].$$

ここで $[dx]$ と $\mathrm{PD}(a)$ がずれる理由は、前者が a 上での積分を測るのに対し、後者は a と交わる相手を測るからである。

この符号を使ってカップ積を検算する。二つを掛けると

$$\int_{T^2} dx \wedge dy = 1$$

で、これは a と b が一度正に交わることを表す。ポアンカレ双対で書けば

$$\langle \mathrm{PD}(a) \smile \mathrm{PD}(b), [T^2] \rangle = \int_{T^2} dy \wedge (-dx) = \int_{T^2} dx \wedge dy = 1 = a \cdot b.$$

もし向きを反転して $dy \wedge dx$ を積分すれば -1 になる。したがってカップ積は「測定器を掛ける」操作であり、符号付き交点数はその測定器を基本類で評価した値である。整数係数ではねじれ部分が実係数へ送ると消えるため、交点形式では自由部分へ制限する必要がある。

曲面を動かしても残る整数

前章では滑らかな構造を直接比較せず、不変量で観測する方針を立てた。本章前半で準備した言葉を使い、閉じた向き付き 4 多様体 X で、二つの 2 次元ホモロジー類 $x, y \in H_2(X; \mathbb{Z})/\mathrm{Tor}$ を横断的に交わる向き付き曲面で表す。ここで**横断的**とは、交点 p で二つの接平面を合わせると 4 次元の接空間 T_pX 全体になるこ

とをいう。従って交点は孤立点になる。交点 p ごとに、二つの接平面の向きが T_pX の向きと一致するかを $\varepsilon_p = \pm 1$ で記録し、

$$Q_X(x, y) = \sum_{p \in \Sigma_x \cap \Sigma_y} \varepsilon_p$$

と置く。曲面の代表を動かすと交点は生成・消滅するが、局所的には符号が反対の対で起こるため総和は変わらない。

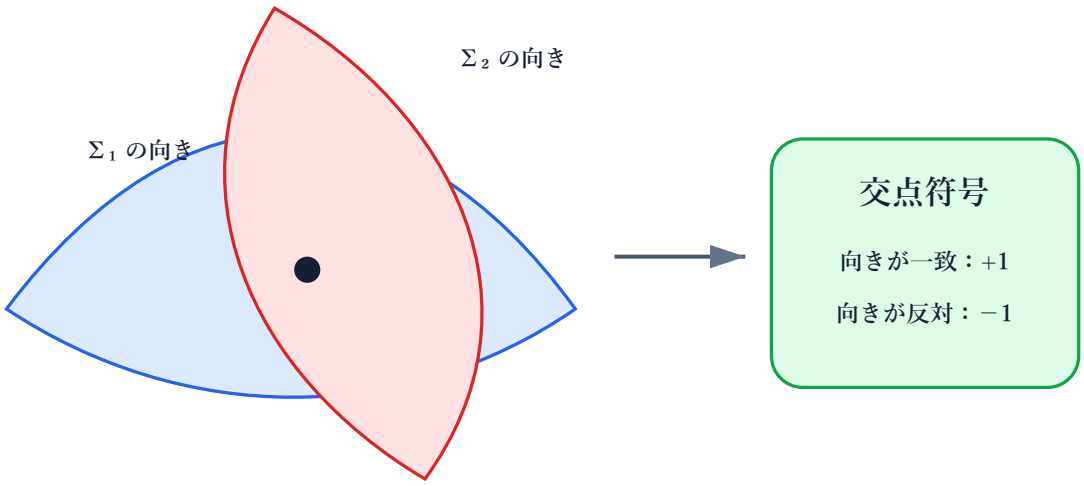


図 4: 二つの向き付き曲面が横断的に一点で交わり、二つの接平面の向きを並べた向きと周囲の 4 次元の向きを比較して交点符号を決める。

図 4 は 4 次元形状そのものではなく、交点での二つの 2 次元接平面を模式化したものである。Σ_1 の向き付き基底を先に、Σ_2 の向き付き基底を後に並べ、その 4 本が T_pX の向き付き基底になれば符号は $+1$、逆なら -1 とする。

計算例：$S^2 \times S^2$

$X = S^2 \times S^2$ とし、

$$A = [S^2 \times \{\mathrm{pt}\}], \quad B = [\{\mathrm{pt}\} \times S^2]$$

を取る。A と B は一点で横断的に交わるので

$$Q_X(A, B) = 1.$$

一方、A は第一因子方向の曲面であり、少し第二因子方向へ押せば自分自身と交わらない。従って

$$Q_X(A, A) = 0.$$

同様に $Q_X(B, B) = 0$ である。基底 (A, B) に関する交点形式は

$$Q_{S^2 \times S^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = H$$

となる。この一つの計算で、自己交点と相互交点が別物であること、そして 4 次元で曲面同士が点で交わることが見える。

幾何的交点をカップ積で書き直す

ここまでで交点数を、曲面を実際に横断させて符号付きに数える整数として理解した。次に、この幾何的定義を計算しやすい代数へ翻訳する。

ホモロジーの k 次元サイクルへ整数を割り当てる線形な測定器を k 次**コサイクル**と考える。コサイクルを適切な同値関係で割って得るのがコホモロジー群 $H^k(X;\mathbb{Z})$ である。微分形式の積分

$$[\omega],[z]\mapsto \int_z \omega$$

はド・ラームコホモロジーと実係数ホモロジーを結ぶ。コホモロジーには次数を足す積

$$\smile : H^p(X;\mathbb{Z})\times H^q(X;\mathbb{Z})\to H^{p+q}(X;\mathbb{Z})$$

があり、**カップ積**と呼ぶ。微分形式では外積 $\wedge$ に対応する。

閉じた向き付き n 次元多様体には、多様体全体の向きを表す**基本類** $[X]\in H_n(X;\mathbb{Z})$ がある。

> **i 引用定理｜ポアンカレ双対性（深度 D）**
>
> X を閉・連結・向き付き n 次元多様体とする。基本類とのキャップ積により、任意の整数 k について
>
> $$H^{n-k}(X;\mathbb{Z})\xrightarrow{\frown[X]} H_k(X;\mathbb{Z})$$
>
> は同型になる。ねじれを捨てた自由部分に限れば、逆写像を
>
> $$\mathrm{PD}: H_k(X;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}\to H^{n-k}(X;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}$$
>
> と書ける。本書では定理の完全証明は引用し、交点形式では整数値の非退化双線形形式を得るため自由部分を使う。[1]

4 次元で $k=2$ とすると、二次元サイクルと二次コホモロジー類が対応する。先ほど幾何的に定義した交点数は

$$Q_X(x,y)=\langle \mathrm{PD}(x)\smile \mathrm{PD}(y),[X]\rangle$$

と書き直せる。次数 2 の類を二つ掛けると次数 4 となり、基本類上で整数として評価できるからである。この式は新しい定義を突然与えるものではなく、符号付き交点数の代数的な再表現である。

> **i 節内演習 2：境界と穴**
>
> 1. 三角形の境界にもう一度 ∂ を作用させ、$\partial^2=0$ を確かめよ。
> 2. トーラスの経線と緯線が一点で交わることから、両者が独立な一次ホモロジー類であることを直感的に説明せよ。
>
> **解答。** 1 では各頂点が正負一回ずつ現れて相殺する。2 では、もし一方が境界なら閉じた他方との符号付き交点数は Stokes 型の議論で 0 になるはずだが、実際には 1 である。従ってどちらも消えず、互いの整数倍でもない。

自己交点は「同じ曲面をそのまま交わらせる」ことではない

自己交点数で読者がつまずく点は、同じ曲面 Σ と自分自身の交点をどう数えるのか、という疑問である。同じ集合として見れば、Σ は全ての点で自分自身と交わってしまう。そこで実際には、Σ を少し押し出した曲面 Σ' と Σ の交点を数える。

この押し出しは法束の切断を選ぶことに対応する。各点 $p\in\Sigma$ で、接平面 $T_p\Sigma$ は 4 次元接空間 T_pX の中の 2 次元部分空間である。$T_p\Sigma$ に垂直な 2 次元方向を集めたものを法束 $N\Sigma$ と呼ぶ。法束の切断

$$s:\Sigma\to N\Sigma$$

は、曲面の各点へ「どちら向きに少し押すか」を選ぶデータである。$s(p) \neq 0$ なら p は押し出された曲面 Σ_s へ移動し、元の Σ から離れる。したがって Σ と Σ_s が交わるのは、一般には $s(p) = 0$ となる孤立点だけである。

零点 p の近くで s を局所座標 (u, v) により

$$s(u, v) = (s_1(u, v), s_2(u, v))$$

と書く。零点が横断的なら、ヤコビ行列

$$\begin{pmatrix} \partial s_1/\partial u & \partial s_1/\partial v \\ \partial s_2/\partial u & \partial s_2/\partial v \end{pmatrix}_{p}$$

の行列式の符号で零点の符号を決める。符号付き零点数

$$\sum_{s(p)=0} \operatorname{sign} \det(ds)_p$$

が法束のオイラー数であり、同時に Σ の自己交点数 $\Sigma \cdot \Sigma$ である。この説明は「法束」という語を、束の一般論へ先送りするためではなく、自己交点が押し出しの零点数であることを手で読めるようにするために入れている。

この見方は後で効く。埋め込まれた曲面の自己交点 $\Sigma \cdot \Sigma$ は、随伴不等式で種数と SW 基本類に結びつく。つまり第 18 章で現れる不等式の右辺の一部は、すでにここで定義した自己交点数である。

計算例：$\mathbb{CP}^2$

$\mathbb{CP}^2$ は、ゼロでない複素数の三つ組 $(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ を

$$(z_0, z_1, z_2) \sim (\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda z_2), \qquad \lambda \in \mathbb{C}^\times$$

で同一視した空間である。一点を同次座標 $[z_0 : z_1 : z_2]$ と書く。$z_0 \neq 0$ の領域では

$$[z_0 : z_1 : z_2] \mapsto \left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0} \right) \in \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$$

が局所座標になる。他の成分がゼロでない領域も同様で、重なりの座標変換は滑らかである。このため $\mathbb{CP}^2$ は実 4 次元の閉じた滑らかな多様体である。

一次方程式 $a_0 z_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 = 0$ は複素射影直線 $L \cong \mathbb{CP}^1 \cong S^2$ を定める。$\mathbb{CP}^2$ の H_2 はこの L のホモロジー類で生成される。独立な二つの一次方程式は一つの射影点を定めるため、二つの異なる射影直線は一点で交わる。複素向きから交点の符号は正である。従って

$$Q_{\mathbb{CP}^2}([L], [L]) = 1.$$

ここで「同じ直線を二回交わらせる」と考えると曖昧になる。正しくは、同じホモロジー類を表す二つの代表を一般位置に動かして交点を数える。代数幾何の言葉では、二つの一次方程式が一つの点を定める、という事実がこの自己交点数である。

以上から、基底 $[L]$ に関する交点形式は一行一列の行列 (1) である。従って $b_2 = 1, b_2^+ = 1, b_2^- = 0$ となる。この数値は第 5 章の Hodge 分解、第 9 章の指数計算、第 16 章の Seiberg–Witten 期待次元で繰り返し用いる。

ユニモジュラーという制約

ねじれ部分を除いた $H_2(X; \mathbb{Z})$ は自由 Abel 群であり、基底を選ぶと Q_X は対称整数行列になる。ポアンカレ双対性により随伴写像

$$H_2(X; \mathbb{Z})/\mathrm{Tor} \to \mathrm{Hom}(H_2(X; \mathbb{Z})/\mathrm{Tor}, \mathbb{Z})$$

は同型なので、行列式は ± 1 である。これがユニモジュラー性である。基底変更 $S \in GL(n, \mathbb{Z})$ は行列を $Q \mapsto S^{\mathsf{T}} Q S$ と変えるため、分類対象は行列そのものではなく整数合同類である。

実数上では Sylvester の慣性法則により

$$Q_X \otimes \mathbb{R} \cong (+1)^{b_2^+} \oplus (-1)^{b_2^-}$$

となる。signature は $\sigma(X) = b_2^+ - b_2^-$、階数は $b_2 = b_2^+ + b_2^-$ である。後で b_2^+ が計量の族を動かす際の壁の余次元を支配するので、単なる線形代数の記号では終わらない。

偶形式と奇形式

$Q_X(x,x)$ が全ての x で偶数なら偶形式、そうでなければ奇形式と呼ぶ。例えば

$$Q_{\mathbb{CP}^2} = (1), \quad Q_{S^2 \times S^2} = H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

H は偶形式で不定値、(1) は奇形式で正定値である。向きを反転すると $Q_{\bar{X}} = -Q_X$ となり、連結和では直和 $Q_{X\#Y} = Q_X \oplus Q_Y$ になる。これら二つの操作だけで、多数の例の形式を計算できる。

E_8 形式は、この偶奇の違いを鋭くする代表例である。基底 $e_1, \dots, e_8$ に対し、対角成分を 2、Dynkin 図で隣り合う基底の交差を -1、それ以外を 0 とする正定値偶格子を考える。各基底ベクトルの自己交点は 2 で偶数であり、隣接する基底を足しても

$$Q(e_i + e_j, e_i + e_j) = 2 + 2 + 2Q(e_i, e_j)$$

の形になるので偶性は保たれる。標準事実としてこの行列の行列式は 1 であり、従ってユニモジュラーである。一方、正定値かつ非対角な偶ユニモジュラー形式であるため、Donaldson 対角化定理が要求する整数対角形式とは両立しない。第 3 章で使う衝突は「E_8 という名前」ではなく、偶・ユニモジュラー・正定値・非対角という四つの性質の同時成立である。

整数上と実数上の違い

実数上で同じ signature を持つ形式は同型になる。しかし、4 多様体の交点形式は整数格子として扱うため、実数上の分類では情報を捨てすぎる。

例えば

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

はどちらも signature 0 で階数 2 である。実数上では同型だが、整数上では偶奇が違う。H では

$$Q(aA + bB, aA + bB) = 2ab$$

なので常に偶数である。一方、$I_{1,1}$ では第一基底ベクトルの自己交点が 1 である。偶奇は整数基底変換で保存されるため、両者は整数格子として同型ではない。

この差は細かすぎる代数ではない。Freedman 分類と Donaldson 定理の衝突は、まさに「整数格子として何が許されるか」に依存する。実数上で対角化して満足してしまうと、4 次元の本質を見落とす。

連結和で形式が足し合わされる理由

$X\#Y$ は、X と Y から 4-ball を一つずつ抜き、境界 S^3 を貼り合わせて作る。2-サイクルは一般位置に動かせば、この貼り合わせ neck を避けて X 側または Y 側に置ける。したがって X 側のサイクルと Y 側のサイクルは交わらない。

このため、$H_2(X\#Y)$ はねじれ部分を無視すれば $H_2(X) \oplus H_2(Y)$ と見なせ、交点形式はブロック対角形になる。

$$Q_{X\#Y} = \begin{pmatrix} Q_X & 0 \\ 0 & Q_Y \end{pmatrix}.$$

例えば $\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}}^2$ の交点形式は $\langle 1\rangle \oplus \langle -1\rangle$ である。向きを反転していない $\mathbb{CP}^2\#\mathbb{CP}^2$ の形式は $\langle 1\rangle \oplus \langle 1\rangle$ であり、両者を混同してはならない。前者は $S^2 \times S^2$ の双曲形式 H と実数上では同じ符号数を持つが、整数上の偶奇が異なる。滑らかな分類では、このような整数格子の細部が消えずに残る。

> **i** 形式が同じなら多様体も同じか
>
> 単連結な閉 4 多様体では交点形式は非常に強いが、滑らかな圏では完全不変量ではない。同じ形式を持ちながら微分同相ではない多様体が存在することこそ、後半で作る不変量の出番である。

代数から存在問題へ

滑らかな閉単連結 4 多様体の交点形式としては、任意のユニモジュラー形式が実現できるわけではない。一方、位相的 4 多様体では Freedman の定理により、任意のユニモジュラー対称整数形式が交点形式として実現される。この二つを混同してはいけない。次章では Freedman の位相的分類と Donaldson の滑らかな制約を同じ表に置く。両者の許容範囲の差が、ゲージ理論を必要とする最初の衝突になる。

第 3 章　Freedman と Donaldson の衝突

交点形式を整数格子として読む

第 2 章の交点形式は、自由アーベル群 $L = H_2(X;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}$ と整数値対称双線形写像

$$Q : L \times L \to \mathbb{Z}$$

の組である。この組を**整数格子**と呼ぶ。基底を選べば Q は整数行列になるが、基底を替えると Q は $S^{T}QS$ に変わる。従って問題は、実数行列として対角化できるかではなく、行列式が ± 1 の整数行列 S でどこまで簡単にできるかである。

非零ベクトル x に対して $Q(x,x) > 0$ なら正定値、$Q(x,x) < 0$ なら負定値という。正と負の両方があれば不定値である。例えば

$$\langle 1\rangle = (1), \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

はそれぞれ正定値、偶の不定値形式である。H は実数上では $\mathrm{diag}(1,-1)$ と同じ符号数を持つが、整数上では偶奇が違うため同値でない。この「整数上」という制約が本章の衝突を生む。

E_8 を行列で見る

E_8 を名前だけで済ませないため、一つの標準行列を掲げる。

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

これは正定値、行列式 1、しかも全ての $x \in \mathbb{Z}^8$ に対して $x^{T}E_8x$ が偶数となる。行列式と正定値性も、名前ではなく行列から確認できる。上の順序で左上 $r \times r$ 小行列の行列式を計算すると

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1$$

となる。全て正なので Sylvester の判定法により正定値で、最後の値が $\det E_8 = 1$ である。偶性は、対角成分が偶数で、非対角成分が二倍されて二次式へ入ることから直ちに分かる。一方、標準対角形式 I_8 には自己交点 1 のベクトルがある。従って E_8 と I_8 は整数基底変換では一致しない。

i 節内演習 3：実数と整数の違い

$u = e_1 + e_2, v = e_1 - e_2$ と置くと、$\mathrm{diag}(1, -1)$ が実数上で双曲形式 H と同じ型になることを確かめよ。さらに、変換行列の行列式が -2 となるため整数基底変換ではないことを確かめよ。

解答。 $Q(u,u) = Q(v,v) = 0, Q(u,v) = 2$ なので、u, v を適当に規格化すれば実数上で H になる。しかし u, v は元の整数格子の指数 2 の部分格子しか生成せず、$GL(2,\mathbb{Z})$ の基底変更ではない。

同じ形式を二つの圏で読む

前章で得た交点形式は同相写像でも微分同相写像でも保存される。しかし、どの形式が実現可能かは位相的な圏と滑らかな圏で異なる。ここで一度、結論の強さを混ぜずに分ける。

i 引用定理｜Freedman 分類（深度 D）

閉・単連結・位相的 4 多様体の分類は、ユニモジュラー交点形式に加えて Kirby–Siebenmann 不変量などを用いて記述される。特に、任意のユニモジュラー対称整数形式は、閉・単連結・向き付き位相的 4 多様体の交点形式として実現される。偶形式の場合、Kirby–Siebenmann 不変量は署名で決まる値

$$\mathrm{ks}(X) \equiv \sigma(Q)/8 \pmod 2$$

に拘束され、対応する向きを保つ同相型は一つである。奇形式の場合、同じ交点形式に対して Kirby–Siebenmann 不変量で区別される二つの同相型が現れうる。証明の核心は Casson ハンドルと円板埋め込み定理であり、本教材では入力・出力・滑らかな圏との境界を固定して引用する。[2]

Kirby–Siebenmann 不変量は、位相多様体を区分線形、従って滑らかな構造へ近づけられるかを測る $\mathbb{Z}/2$ 値の障害である。滑らかな多様体では 0 になる。ただし「0 なら必ず滑らか」という単純な十分条件として使ってはならない。本章では、Freedman の存在結果と Donaldson の滑らかさへの必要条件を比較するためにだけ用いる。

「任意の形式に対し一意な多様体がある」という粗い言い換えは誤りである。偶形式と奇形式で Kirby–Siebenmann 不変量の自由度が違い、向き、同相写像の意味、閉性・単連結性の仮定も落ちるからだ。本書で使うのは、位相圏では実現できる形式が滑らかな圏よりはるかに多い、という正確に限定した結論である。

正定値形式に突然現れる剛性

i 引用定理｜Donaldson 対角化定理（証明アーキテクチャ、深度 C）

X を閉・滑らか・向き付き・単連結 4 多様体とし、Q_X が正定値とする。このとき Q_X は整数上で対角形式 $\langle 1, \ldots, 1 \rangle$ と同値である。負定値の場合は向きを反転して $\langle -1, \ldots, -1 \rangle$ を得る。[3], [4]

実数上で対角化できるという主張ではない。整数基底で ± 1 の対角形になる、という強い算術的制約である。例えば E_8 格子は偶・ユニモジュラー・正定値だが、対角形式ではない。Freedman 側では E_8 を交点形式に持つ位相的 4 多様体が現れ、Donaldson 側ではその多様体が滑らかな構造を持つ可能性が排除される。

E_8 がなぜ対角形式でないか

E_8 という名前だけでは、何が衝突しているのかが見えにくい。ここで必要な性質は三つである。

1. E_8 は階数 8 の正定値ユニモジュラー形式である。
2. E_8 は偶形式である。つまり全ての格子ベクトル x について $Q(x,x)$ が偶数である。
3. 対角形式 $\langle 1, \ldots, 1 \rangle$ は奇形式である。基底ベクトル e_i が $Q(e_i, e_i) = 1$ を持つからである。

偶奇は整数合同で保存される。したがって E_8 は正定値ユニモジュラーであっても、Donaldson が許す対角形式とは同値になれない。Freedman は位相圏でこの形式を実現する対象を与え、Donaldson は滑らかな圏でそれを排除する。この一点に、4 次元で圏を分ける必要性が凝縮されている。

衝突を一つの推論として書く

論理を圏ごとに分けて書くと、E_8 の例で何が起きているかが明確になる。

```
E8 はユニモジュラー形式である
→ Freedman により、対応する位相的 4 多様体 X が存在する
→ E8 は正定値で非対角である
→ もし X が滑らかな多様体なら、Donaldson により Q_X は整数上対角化される
→ 偶奇に反する
→ X は滑らかな構造を持たない
```

ここで使っている背理法の仮定は「X が滑らかである」だけである。二つの滑らかな構造を比較しているわけではない。したがって、この推論の結論は「非平滑化可能性」であり、「異種滑らかな構造の組の存在」ではない。

この細部を早い段階で固定しておく理由は、Donaldson 理論の成功を過大に読まないためである。Donaldson 対角化定理は非常に強いが、それだけで滑らかな分類を完成させるわけではない。後で Donaldson 多項式や SW 不変量が必要になるのは、同じ位相型の中に残る滑らかな構造の差を測るためである。

証明はどこで解析を使うか

対角化定理の論理を先に見渡す。

1. $SU(2)$ または $SO(3)$ 束上で反自己双対接続のモジュライ空間を作る。
2. 線形化とゲージ固定により、適切な条件下で有限次元の滑らかな空間にする。
3. Uhlenbeck コンパクト化でバブリングを境界として管理する。
4. 低次元モジュライ空間の端の構造から、交点形式の格子点に制約を導く。

難所は第 2・第 3 段階である。したがって「PDE の解があるから位相が分かる」のではない。商空間の局所構造、横断性、向き、コンパクト性を揃えて初めて、解析的対象が整数格子へ制約を返す。

ここで読者が疑問を抱くのは当然である。「なぜ接続の解空間の端が、交点形式の対角化を強制するのか」はまだ説明されていない。本章で確定したのは、後で作るモジュライ空間が解くべき問題である。すなわち、位相多様体の交点形式としては実現できても、滑らかな 4 多様体の交点形式としては実現できない形式を、解析的な矛盾として検出しなければならない。

衝突がまだ教えていないこと

E_8 の例が示すのは非平滑化可能性であって、同じ位相多様体上に二つの滑らかな構造があることではない。異種滑らかな構造の組には、まず同相な二つの滑らかな多様体を作り、次にゲージ不変量で微分同相でないことを示す必要がある。この区別は第 14 章で回収する。

今は Donaldson の機械そのものを作る。交点形式という大域的整数へ、局所的な接続と曲率がどう到達するのか。次章では、座標に依存する行列値 1 形式から、ゲージ変換で整合する曲率を組み立てる。

Part II　4 次元の方程式

第 4 章　接続・曲率・ゲージ変換を作り直す

接ベクトルと余接ベクトル

曲面上の点 p で速度を考える。p を通る曲線 $\gamma(t)$ を取り、$\gamma'(0)$ が同じなら同じ接ベクトルとみなす。この接ベクトル全体が接空間 T_pX である。座標 $(x^1, \dots, x^n)$ では

$$v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}$$

と書ける。座標を替えると成分 v^i と基底 $\partial/\partial x^i$ は逆向きに変換し、幾何学的な速度 v 自体は変わらない。

T_pX 上の線形関数全体を余接空間 T_p^*X といい、$dx^1, \dots, dx^n$ を基底に持つ。前章の 1 形式は、各点 p に余接ベクトルを滑らかに割り当てたものである。接空間を全点について束ねたものが接束 TX、余接空間を束ねたものが余接束 T^*X である。

ベクトル束：円筒とメビウス帯

各点 $p \in X$ の上にベクトル空間 E_p が一つずつ載り、局所的には $U \times \mathbb{R}^r$ と同じに見えるものを階数 r の**ベクトル束** $E \to X$ という。$U \times \mathbb{R}^r$ との同一視を**局所自明化**と呼ぶ。各点にベクトル $s(p) \in E_p$ を滑らかに選ぶ写像 $s : X \to E$ が**切断**である。

底空間を円周とする階数 1 の実ベクトル束を二つ考える。

- 円筒 $S^1 \times \mathbb{R}$ では、一周しても繊維の正方向は同じ向きへ戻る。ゼロでない切断 $s(\theta) = 1$ を全周で選べる。
- メビウス帯では、一周すると繊維の正方向が負方向へ戻る。連続な実数値関数として同じ局所表示を使おうとすれば、どこかで 0 を通らなければならない。

どちらも短い弧の上では $U \times \mathbb{R}$ に見える。違いは重なりでの貼り合わせにあり、ベクトル束が「局所的には積でも、大域的にはねじれうる」ことを示す。

遷移関数で書けば、この違いは一つの符号になる。円周を二つの開弧 U, V で覆い、重なりが二つの弧に分かれるように取る。円筒では両方の重なりで遷移関数を $+1$ にできる。メビウス帯では一方を $+1$、もう一方を -1 とする貼り合わせが必要で、一周した切断の値は v から $-v$ へ戻る。局所自明化の中ではどちらも同じ一次元実線束に見えるが、遷移関数の積が大域的な違いを記録する。主束では、この符号が G 値関数へ置き換わる。

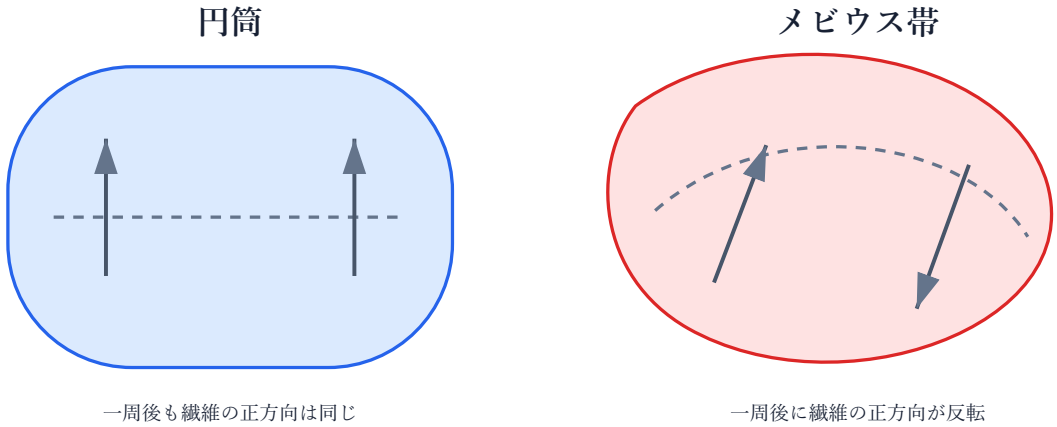


図 5: 円筒では円周を一周しても繊維の正方向が保たれるが、メビウス帯では一周後に反転する。

図 5 の違いは、各点の繊維を一本ずつ見ても分からない。重なる局所自明化を一周つないだとき、遷移関数の積が向きを保つか反転するかという大域的な貼り合わせに現れる。

動く基底では普通の微分が余分を拾う

平面上で、位置 t に応じて回転する正規直交基底

$$e_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad e_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

を考える。固定ベクトル $v = (1, 0)^T$ をこの基底で書くと

$$v = \cos t\, e_1(t) - \sin t\, e_2(t)$$

となり、成分は変化する。しかし幾何学的なベクトル v は動いていない。実際、

$$e_1'(t) = e_2(t), \qquad e_2'(t) = -e_1(t)$$

を使って全体を微分すると 0 になる。成分だけを微分すれば、この基底自身の回転を見落としてしまう。

成分列を $a(t)$、基底を並べた行列を $R(t)$ とすれば $v = R(t)a(t)$ であり、

$$R(t)^{-1}v'(t) = a'(t) + R(t)^{-1}R'(t)a(t).$$

右辺の $R^{-1}R'$ が基底の動きを補正する。一般の束でこの補正項を与えるものが**接続**、補正された微分が**共変微分**である。

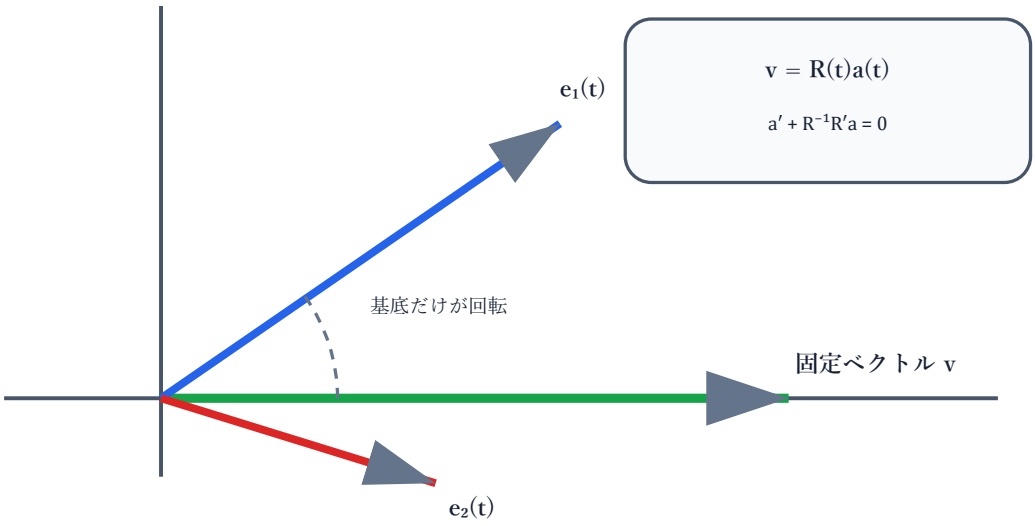


図 6: 幾何学的には固定されたベクトルを回転基底で表すと成分が変化し、基底の回転を表す項がその変化を相殺する。

図 6 では緑の v は動いていない。それでも青と赤の基底に対する係数は時刻 t とともに変わる。共変微分は、係数の変化から「座標枠が勝手に動いた分」を差し引き、幾何学的な変化だけを残す。

平行移動、ホロノミー、曲率

曲線 $\gamma(t)$ に沿う切断 $s(t)$ が共変微分 $\nabla_{\dot\gamma} s = 0$ を満たすとき、s は**平行**であるという。初期値 $s(0)$ を与えると、微分方程式を解いて終点のベクトル $s(1)$ が決まる。これが平行移動である。

閉曲線に沿って一周した後、ベクトルが元とどれだけずれるかを**ホロノミー**という。球面上でベクトルを赤道と経線からなる三角形に沿って平行移動すると、出発点へ戻ったとき向きが回転する。この回転は局所座標の失敗ではなく、球面の曲がりを検出している。

微小な長方形を二方向へ回ったときの「右へ進んでから上へ」と「上へ進んでから右へ」の差を、面積で割った極限が**曲率**である。共変微分 ∇_1, ∇_2 を使えば

$$[\nabla_1, \nabla_2] = \nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1$$

がこの差を表す。曲率は、局所的な二方向の微分が交換しない度合いと、微小ループのホロノミーを同時に記録する。

$U(1)$ から $SU(2)$ へ

$U(1) = \{e^{i\theta}\}$ は複素平面の位相回転の群である。局所的な位相を $u = e^{i\chi}$ だけ変えると、接続 1 形式は $A \mapsto A + u^{-1}du$ のように変わる。$U(1)$ は可換なので、曲率は局所的に $F_A = dA$ となる。電磁気学でベクトルポテンシャルを変えても磁場が変わらない構造が基本例である。

$SU(2)$ は行列式 1 の 2 次ユニタリ行列の群で、行列積は一般に交換しない。無限小変換は反エルミート跡ゼロ行列からなる Lie 代数 $\mathfrak{su}(2)$ に属する。非可換性のため、曲率には後で現れる二次項 $A \wedge A$ が必要になる。

群 G が繊維に自由に推移的に作用する束を**主 G 束**という。局所自明化では $U \times G$ に見えるが、重なりでは G 値関数で貼り合わされる。主束から、G の線形表現を使ってベクトル束を作れる。特に G が自身の Lie 代数へ共役作用する表現から得る束が随伴束 $\mathrm{ad}\ P$ である。

> **i** 節内演習 4：回転する基底
>
> 上の e_1, e_2 と $v = \cos t\, e_1 - \sin t\, e_2$ について、積の微分を全て書き、$v'(t) = 0$ を確かめよ。
>
> **解答。** $(-\sin t)e_1 + (\cos t)e_1' - (\cos t)e_2 - (\sin t)e_2'$ に $e_1' = e_2, e_2' = -e_1$ を代入すると、e_1, e_2 の係数がそれぞれ 0 になる。

微分を束の上へ持ち上げる

交点形式だけでは滑らかな圏への強い制約を説明できなかった。そこで多様体上に補助的な主 $SU(2)$ 束 $P \to X$ を置く。局所自明化を選ぶと接続は $\mathfrak{su}(2)$ 値 1 形式 A として見えるが、A 自身は座標に依らないテンソルではない。自明化を $l : U \to SU(2)$ で変えると

$$A \mapsto A^l = l^{-1}Al + l^{-1}dl$$

と非斉次に変換する。最後の項があるため、単に行列値 tensor とは呼べない。

随伴束の切断 s に対する共変微分を

$$d_A s = ds + [A, s]$$

と置くと、変換後には $d_{A^l}(l^{-1}sl) = l^{-1}(d_A s)l$ が成り立つ。これが接続を導入する理由である。通常の微分 d は局所表示の変更と両立しないが、d_A は両立する。

なぜ普通の微分では足りないか

局所自明化を一つ固定すれば、切断は関数のように見える。すると「ただ ds を使えばよいのではないか」と思える。しかし別の自明化へ移ると、同じ切断は $s' = l^{-1}sl$ と表示される。普通に微分すると

$$ds' = d(l^{-1}sl)$$

となり、dl を含む項が余分に出る。この余分な項は、切断そのものの変化ではなく、局所フレームを動かしたことによる見かけの変化である。接続 A は、この見かけの変化を補正し、「束の中で本当に変化した分」を測るための道具である。

したがって接続は、微分を複雑にするための装飾ではない。局所表示に依存しない微分を可能にする最小限の追加データである。ゲージ理論では、この追加データそのものを未知量として動かす。

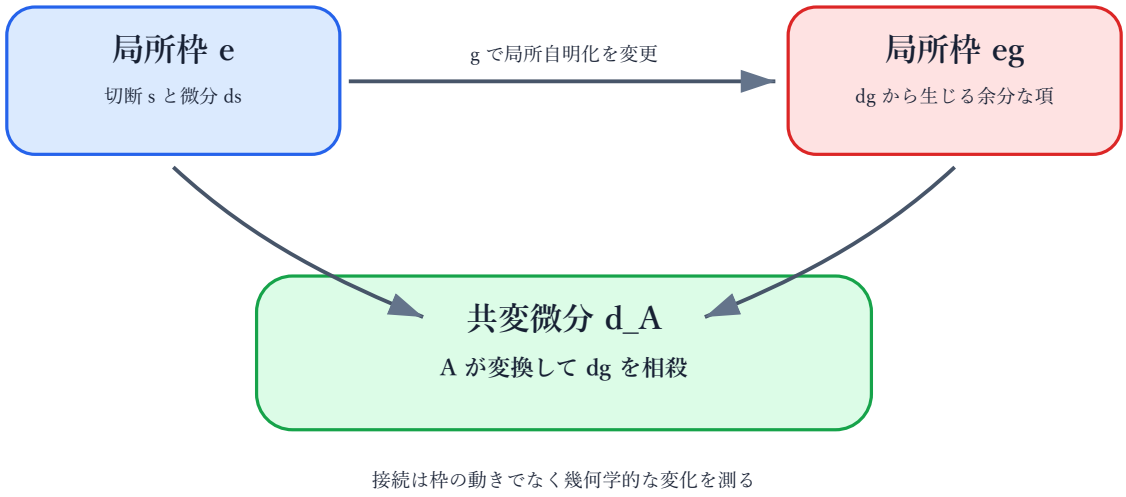


図 7: 局所自明化を変えると普通の微分には余分な項が出る。接続 1 形式はその余分な項を補正し、共変微分を大域的に意味のある量にする。

二回微分した失敗が曲率になる

d_A^2 を計算すると

$$d_A^2 s = [F_A, s], \quad F_A = dA + A \wedge A.$$

局所座標で $A = \sum_i A_i \, dx^i$ と書けば、曲率の係数は

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]$$

である。可換な $U(1)$ では最後の交換子が消え、電磁気学の回転に近い式になる。非可換な $SU(2)$ では $A_i A_j - A_j A_i$ が残るので、A が小さくても方程式は線形ではない。この一項が、後の ASD 方程式の線形化では低階項として現れ、主記号では消えるが、非線形解析では消えない。

$A \wedge A$ を落とすとゲージ共変性が壊れる。非可換群を使う代価がこの二次項であり、同時に理論の非線形性の源でもある。曲率は

$$F_{A^l} = l^{-1} F_A l$$

と斉次に変換するので、Ad 不変内積でノルムを取った量は自明化に依存しない。

Bianchi 恒等式も定義から出る。次数付き Leibniz 則と Jacobi 恒等式により

$$d_A F_A = 0.$$

これは後で ASD 解が Yang–Mills 方程式を満たすことを導く一行になる。

可換な場合との比較

もし構造群が $U(1)$ なら Lie algebra は可換であり、局所的には $A \wedge A$ に対応する交換子項は消える。曲率はほぼ $F_A = dA$ と読める。これに対し $SU(2)$ では、接続成分同士が非可換に相互作用するため、$A \wedge A$ が残る。

この差は後で Donaldson 理論と Seiberg–Witten 理論の差になる。Donaldson 側では非可換曲率の非線形性がバブリングや貼り合わせを難しくする。SW 側では接続は可換だが、スピノルとの連成が別の非線形性を作る。したがって「非可換だから難しい」「可換だから線形」という短絡は避けなければならない。

ゲージ変換公式を確認する

接続の変換式

$$A^{l} = l^{-1}Al + l^{-1}dl$$

は暗記するものではなく、共変微分が局所表示の変更と両立するように強制される。切断を $s' = l^{-1}sl$ と書くと、

$$d_{A^l} s' = d(l^{-1}sl) + [A^l, l^{-1}sl].$$

$d(l^{-1}) = -l^{-1}(dl)l^{-1}$ を使って展開すると、dl を含む余分な項が現れる。この余分な項をちょうど打ち消すために $l^{-1}dl$ が必要になる。計算後には

$$d_{A^l}(l^{-1}sl) = l^{-1}(d_A s)l$$

が残る。したがって非斉次項は不自然な飾りではなく、「微分してから座標を変える」と「座標を変えてから微分する」を一致させるための項である。

曲率変換で二次項が必要になる

$F_A = dA + A \wedge A$ の二次項も同じ理由で避けられない。もし dA だけを曲率と呼ぶと、ゲージ変換後の dA^l には dl と $d^2 l$ に由来する項が残り、$l^{-1}(dA)l$ という斉次な変換則にならない。

$A \wedge A$ を加えると、これらの余分な項が相殺される。結果として

$$F_{A^l} = l^{-1} F_A l$$

が成り立つ。曲率が斉次に変換するからこそ、$\mathrm{tr}(F_A \wedge F_A)$ や $|F_A|^2$ のような量が大域的に意味を持つ。

局所的な曲率から大域的整数へ

まず一段低い例で、「曲率を積分すると整数が出る」理由を作っておく。底空間を S^2 とし、北半球 U_N と南半球 U_S で複素直線束を自明化する。赤道 $U_N \cap U_S \simeq S^1$ 上の貼り合わせを

$$g(e^{i\theta}) = e^{in\theta}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

とする。$n = 0$ なら自明束で、$n = 1$ は Hopf 線束に対応する。ここでは南側フレームを $e_S = e_N g^{-1}$ と取る。この局所フレーム規約では、同じ接続を表す 1 形式は重なりで

$$A_S = A_N - g^{-1}dg = A_N - in\, d\theta$$

と変換する。前のゲージ変換公式 $A^u = u^{-1}Au + u^{-1}du$ は能動的にフレームを u で替える式であり、ここでは二つの局所フレームを貼り合わせる約束を固定している。曲率は $F = dA_N = dA_S$ と貼り合わさる。赤道の向きを北半球の境界向きで取ると、南半球の境界向きはその反対なので、Stokes の定理から

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S^2} F = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{U_N} dA_N + \int_{U_S} dA_S\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1}(A_N - A_S) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} g^{-1}dg = n$$

となる。赤道の向き、あるいは遷移関数を g^{-1} として束を表示すれば符号は反転する。ここで大事なのは、規約を固定すれば符号を後から選び直す必要がなく、積分値が赤道写像 $S^1 \to U(1)$ の巻き数という整数に等しい点である。

この例で分かることは二つある。接続を変えても積分が変わらないことと、その値が整数であることは別の主張である。前者は下の変分計算で示せる。後者は、束が遷移関数で貼り合わされ、その巻き数が整数であることに由来する。$SU(2)$ の第二 Chern 数では同じ構造が高次の Chern–Weil 理論として現れ、整数性そのものは標準定理として使う。

規約を $\langle \xi, \eta \rangle = -\,\mathrm{tr}(\xi\eta)$ とし、$SU(2)$ 束の第二チャーン数を

$$k = c_2(P)[X] = \frac{1}{8\pi^2}\int_X \mathrm{tr}(F_A \wedge F_A)$$

の符号規約に合わせて固定する。符号は文献のトレースの規約で変わるが、一度選べばエネルギー恒等式まで同じ規約を保つ必要がある。ここで tr は行列表現での通常のトレースであり、内積には $-\operatorname{tr}(\xi\eta)$ を使う。したがって、式を比較するときは「トレースを取る場所」と「内積として正にする場所」を分けて読む。

なぜ右辺は接続 A に依らないのか。A_t を接続の経路、$\dot{A}_t = a_t$ とすると $\frac{d}{dt}F_{A_t} = d_{A_t}a_t$ なので、Bianchi 恒等式と trace の不変性から

$$\frac{d}{dt}\operatorname{tr}(F_{A_t}\wedge F_{A_t}) = 2d\operatorname{tr}(a_t\wedge F_{A_t}).$$

X が閉なら Stokes の定理により積分の微分は 0 である。解析的に変化する接続から、離散的な位相数が取り出された。

この導出は Chern–Weil 理論の最小形である。接続 A は無限次元空間の中で連続に動かせるが、積分

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_X \operatorname{tr}(F_A\wedge F_A)$$

は動かない。さらに、これが本当に整数になることは、$U(1)$ の巻き数模型の高次版である Chern–Weil の整数性定理により保証される。後のエネルギー恒等式では、この動かない整数と動く解析量 $\|F_A^{\pm}\|^2$ を同じ式に入れる。そこから、位相数がエネルギーの床になる。

なぜ閉多様体を仮定するか

上の不変性で Stokes の定理を使った。X に境界があると

$$\int_X d\operatorname{tr}(a_t\wedge F_{A_t}) = \int_{\partial X}\operatorname{tr}(a_t\wedge F_{A_t})$$

という境界項が残る。この境界項を消すには境界条件を入れるか、境界上の別の理論を同時に扱う必要がある。本書が閉 4 多様体を基本対象にするのは、単に話を短くするためではない。まず、Chern–Weil 数、エネルギー恒等式、モジュライの数え上げが境界項なしで閉じる状況を作るためである。

まだ方程式は選ばれていない

曲率を得ただけでは、どの接続を数えるべきか決まらない。$F_A = 0$ は強すぎて、多くの束で解がない。Yang–Mills 方程式は二階で、モジュライの構造を直接読むには複雑である。4 次元ではホッジ作用素が 2 形式を同じ次数に保つ。この偶然から、位相数とエネルギーを結ぶ一次方程式が現れる。

第 5 章　なぜ 4 次元なのか

ホッジ作用素を定義するまで

前章で曲率が Lie 代数値 2 形式になることを見た。本章では、2 形式を二つに分ける Hodge 作用素を、線形代数から構成する。

計量と向き

実ベクトル空間 V の内積 g は長さと角度を定める。多様体の各接空間 T_pX に滑らかに内積を与えたものが **Riemann 計量**である。局所座標では対称正定値行列 (g_{ij}) で表される。

向きは、順序付き基底を「正」と「負」の二群へ分ける選択である。$\mathbb{R}^2$ では (e_1, e_2) を正と決めると (e_2, e_1) は負になる。向きと計量を選ぶと、正規直交余標構 $(e^1, \dots, e^n)$ に対して

$$d\mathrm{vol} = e^1\wedge\cdots\wedge e^n$$

という体積形式が定まる。

形式の内積

p 形式は、p 個の接ベクトルを入れると符号付きの p 次元体積を返す交代多重線形写像である。n 次元空間の p 形式全体の次元は

$$\dim \Lambda^p V^* = \binom{n}{p}$$

である。例えば 4 次元の 2 形式は

$$e^{12}, e^{13}, e^{14}, e^{23}, e^{24}, e^{34}, \qquad e^{ij} = e^i \wedge e^j$$

の 6 個を基底に持つ。計量から、これらを正規直交基底とする内積 $\langle \, , \, \rangle$ が形式の空間にも入る。

定義

p 形式 α に対し、Hodge 作用素 $*\alpha$ は $(n-p)$ 形式であり、全ての p 形式 β に対して

$$\beta \wedge *\alpha = \langle \beta, \alpha \rangle d\mathrm{vol}$$

を満たすものとして定義される。右辺が計量と向きを使うため、Hodge 作用素もその両方に依存する。

二次元で $d\mathrm{vol} = e^1 \wedge e^2$ とすれば

$$*1 = e^{12}, \qquad *e^1 = e^2, \qquad *e^2 = -e^1, \qquad *e^{12} = 1.$$

特に 1 形式上では $*^2 = -1$ で、90 度回転に似ている。一般には Riemann 計量が正定値なら

$$*^2 = (-1)^{p(n-p)}$$

が成り立つ。4 次元の 2 形式では指数が 4 なので $*^2 = 1$ となる。従って固有値は $+1$ と -1 だけであり、2 形式を二群へ分けられる。

> **節内演習 5：Hodge 作用素の符号**
>
> 正向き正規直交余標構 (e^1, e^2, e^3, e^4) について、定義から $*e^{12} = e^{34}$ と $*e^{13} = -e^{24}$ を確かめよ。
>
> **解答。** $e^{12} \wedge e^{34} = e^{1234} = d\mathrm{vol}$ なので前者を得る。$e^{13} \wedge e^{24} = -e^{1234}$ なので、正の体積形式を得るには後者に負号が必要である。

2 形式を同じ次数のまま分ける

向きと Riemann 計量を備えた n 次元多様体では、Hodge 作用素は p 形式を $(n-p)$ 形式へ送る。曲率は 2 形式なので、$*F_A$ を再び曲率と同じ型として比較できるのは $n = 4$ のときである。4 次元では $*^2 = 1$ が成り立ち、

$$\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-, \quad \omega^{\pm} = \frac{1}{2}(\omega \pm *\omega)$$

と直交分解できる。

正向き正規直交余標構 (e^1, e^2, e^3, e^4) を取り、$e^{ij} = e^i \wedge e^j$ と書くと

$$*e^{12} = e^{34}, \quad *e^{13} = -e^{24}, \quad *e^{14} = e^{23}.$$

したがって Λ^2_+ と Λ^2_- はそれぞれ 3 次元である。

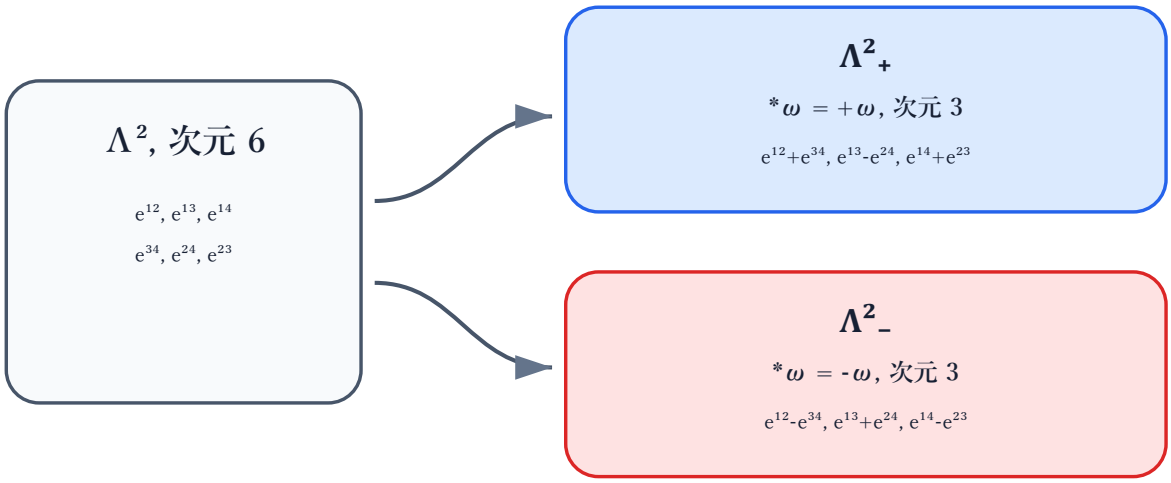


図 8: 2 形式の 6 次元空間がホッジ作用素の固有値により 3 次元ずつへ分かれる。

符号を一つ確認する

$*\,e^{13} = -e^{24}$ の負号は、向きの規約から強制される。ホッジ作用素は

$$\alpha \wedge *\,\alpha = |\alpha|^2 d\mathrm{vol}$$

を満たすように定義される。ところが

$$e^{13} \wedge e^{24} = e^1 \wedge e^3 \wedge e^2 \wedge e^4 = -e^{1234}.$$

したがって $*\,e^{13} = e^{24}$ では符号が合わない。$*\,e^{13} = -e^{24}$ として初めて

$$e^{13} \wedge (-e^{24}) = e^{1234}$$

となる。この小さな符号確認は、後の自己双対基底の符号、さらに位相数規約へつながる。

自己双対基底を実際に作る

上の計算から、自己双対 2 形式の基底は例えば

$$\omega_1^+ = e^{12} + e^{34}, \quad \omega_2^+ = e^{13} - e^{24}, \quad \omega_3^+ = e^{14} + e^{23}$$

である。反自己双対基底は符号を反対にして

$$\omega_1^- = e^{12} - e^{34}, \quad \omega_2^- = e^{13} + e^{24}, \quad \omega_3^- = e^{14} - e^{23}.$$

例えば

$$*\,(e^{13} - e^{24}) = -e^{24} + e^{13} = e^{13} - e^{24}$$

なので ω_2^+ は自己双対である。ここで符号が一つでもずれると、ASD 方程式の向き規約までずれる。4 次元ゲージ理論では、こうした線形代数の符号が後の位相数に直結する。

外積の符号を読む

$\omega = \omega^+ + \omega^-$ に対し、自己双対・反自己双対部分の直交性から

$$\omega \wedge \omega = \left(|\omega^+|^2 - |\omega^-|^2\right) d\mathrm{vol}.$$

一方、$\omega \wedge *\,\omega = |\omega|^2 d\mathrm{vol}$ なので

$$|\omega|^2 = |\omega^+|^2 + |\omega^-|^2.$$

同じ二成分が「差では位相的な積」「和では解析的なノルム」を与える。これが次章のエネルギー恒等式の線形代数的核心である。

この式を一行で済ませず確認する。自己双対なら $*\omega^+ = \omega^+$、反自己双対なら $*\omega^- = -\omega^-$ なので

$$\omega^+ \wedge \omega^+ = \omega^+ \wedge *\omega^+ = |\omega^+|^2 d\mathrm{vol},$$

一方

$$\omega^- \wedge \omega^- = -\omega^- \wedge *\omega^- = -|\omega^-|^2 d\mathrm{vol}.$$

また ω^+ と ω^- は直交しているので交差項は消える。したがって外積平方は差になり、ノルムの二乗は和になる。この「和と差」が、エネルギーと位相数を同時に扱える理由である。

交差項はなぜ消えるか

$\omega^+ \wedge \omega^-$ が消える理由も確認しておく。自己双対性と反自己双対性から

$$\omega^+ \wedge \omega^- = \omega^+ \wedge (-*\omega^-).$$

右辺は内積で書けば

$$-\langle \omega^+, \omega^- \rangle d\mathrm{vol}$$

である。Λ^2_+ と Λ^2_- はホッジ作用素の異なる固有値の固有空間なので直交し、内積は 0 になる。したがって交差項は消える。ここで使っているのは、2 形式の外積と Hodge 内積が 4 次元で同じ体積形式に落ちるという事実である。

共形不変性という第二の一致

計量を $g' = e^{2f} g$ と変えると、p 形式上のホッジ作用素は $*_{g'} = e^{(n-2p)f} *_g$ と変わる。$n = 4, p = 2$ では指数が 0 となり、$\Lambda^2_\pm$ の分解は共形類だけに依存する。

同じことはエネルギーのスケーリングにも現れる。Euclid 空間で $x \mapsto \lambda x$ とし、接続を $A_\lambda(x) = \lambda A(\lambda x)$ と縮尺すると、$F_{A_\lambda}(x) = \lambda^2 F_A(\lambda x)$ だから

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F_{A_\lambda}|^2 dx = \lambda^{4-n} \int_{\mathbb{R}^n} |F_A|^2 dx.$$

$n = 4$ でのみエネルギーが尺度不変になる。この臨界性は美点だけではない。解列が小さな尺度へエネルギーを集中させても全エネルギーを失わず、バブリングを起こせることを意味する。

なぜ 3 次元や 5 次元では同じ話にならないか

3 次元では曲率は 2 形式で、ホッジ作用素は 1 形式へ送る。$F_A = \pm * F_A$ のような同じ型の一次方程式は書けない。5 次元では $*F_A$ は 3 形式であり、やはり曲率と直接比較できない。

もちろん他次元にも重要なゲージ理論はある。しかし本書の筋道、すなわち

$$\text{曲率 2 形式} \to \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_- \to \text{一次方程式} \to \text{4 多様体の交点形式}$$

という連鎖は 4 次元に固有である。ここで初めて、解析方程式と中間次元の位相形式が同じ舞台に乗る。

三つの 4 次元性

ここまでに三つの一致が見えた。

- 中間次元サイクルの交点が整数になる。
- 曲率 2 形式が $\Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ に分かれる。
- L^2 曲率エネルギーが尺度不変になる。

これらは別々の偶然ではない。Chern–Weil 積分が曲率の二次式であり、4 形式として X 上で積分されるため、代数・解析・位相が同じ次数に集まる。次章ではこの一致を一つの等式へまとめ、ASD 方程式を「思いつき」でなくエネルギー最小化から導く。

第 6 章　Yang–Mills エネルギーと ASD 方程式

方程式を選ぶ基準

接続 A は無限個の自由度を持つので、全てを分類することはできない。そこで、曲率が小さい接続を選ぶ。有限次元の例では、関数 $E(x)$ の最小値を探すため $dE/dx = 0$ を解く。同じ発想で、接続に実数を割り当てる汎関数

$$\mathrm{YM}(A) = \int_X |F_A|^2 \, d\mathrm{vol}$$

を考える。これは曲率の二乗を全空間で足した量で、Yang–Mills エネルギーと呼ぶ。ゲージ変換で F_A は共役変換され、Lie 代数の内積は共役で不変なので、$\mathrm{YM}(A)$ はゲージ変換で変わらない。

ただし、単にエネルギーを最小化するだけでは位相情報が見えないように思える。4 次元では、第 4 章の Chern–Weil 数と第 5 章の自己双対分解が同じ二つの非負数 $\| F_A^+ \|^2, \| F_A^- \|^2$ を「差」と「和」で測る。この一致が位相数をエネルギーの下限へ変える。

変分を途中から省略しない

接続を $A_t = A + t a$ と変える。ここで a は Lie 代数値 1 形式である。曲率を展開すると

$$\begin{aligned} F_{A_t} &= d(A + ta) + (A + ta) \wedge (A + ta) \\ &= F_A + t \left(\, da + A \wedge a + a \wedge A \, \right) + t^2 a \wedge a \\ &= F_A + t \, d_A a + t^2 a \wedge a. \end{aligned}$$

従って

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F_{A_t} = d_A a.$$

内積を微分すると

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{YM}(A_t) = 2 \int_X \langle d_A a, F_A \rangle \, d\mathrm{vol}.$$

d_A^* を d_A の形式的随伴、すなわち閉多様体上で

$$\int_X \langle d_A a, b \rangle \, d\mathrm{vol} = \int_X \langle a, d_A^* b \rangle \, d\mathrm{vol}$$

を満たす作用素とする。任意の変分 a に対して一階変分が 0 になる条件は

$$d_A^* F_A = 0$$

である。これが Yang–Mills 方程式である。境界がある場合には部分積分で境界項が残るため、本章では閉多様体を仮定する。

i 節内演習 6：変分の型

a が 1 形式、F_A が 2 形式であるとき、$d_A a$ と $d_A^* F_A$ の次数を答えよ。また上の内積の両辺が積分できる理由を説明せよ。

解答。 $d_A a$ は 2 形式、$d_A^* F_A$ は 1 形式である。左辺は 2 形式同士、右辺は 1 形式同士の点ごとの内積なので関数になり、体積形式を掛けて 4 次元多様体上で積分できる。

位相数がエネルギーの床になる

前章の分解を曲率へ適用し、$F_A = F_A^+ + F_A^-$ とする。本書では

$$\mathrm{YM}(A) = \int_X |F_A|^2 d\mathrm{vol} = \| F_A^+ \|_{L^2}^2 + \| F_A^- \|_{L^2}^2$$

と定義する。位相電荷（位相数）の規約を

$$8\pi^2 k = \| F_A^- \|_{L^2}^2 - \| F_A^+ \|_{L^2}^2$$

に固定する。二式を引き算すれば

$$\mathrm{YM}(A) = 8\pi^2 k + 2 \| F_A^+ \|_{L^2}^2$$

を得る。$k \geq 0$ なら $\mathrm{YM}(A) \geq 8\pi^2 k$ であり、等号はちょうど

$$F_A^+ = 0$$

のときに成立する。これが反自己双対 (ASD) 方程式である。符号規約や向きを反転すれば自己双対側と入れ替わるが、「位相数がエネルギー下限を与え、片側の曲率が消えると等号」という内容は変わらない。[4]

和と差から ASD 方程式が出る

この導出を、数の問題としてもう一度読む。二つの非負数

$$x = \| F_A^+ \|_{L^2}^2, \quad y = \| F_A^- \|_{L^2}^2$$

を考える。エネルギーは和 $x + y$ であり、位相数は差 $y - x$ である。差 $y - x = 8\pi^2 k$ が固定されているとき、和 $x + y$ を最小にするには、小さい側の変数 x を 0 にするしかない。これが $F_A^+ = 0$ である。

つまり ASD 方程式は、見た目の対称性だけから選んだ方程式ではない。位相数で差が固定され、エネルギーで和を最小化するという初等的な構造から強制される。ここで第 5 章の「外積平方は差、ノルムの二乗は和」という線形代数が使われている。

エネルギー恒等式を逆向きにも読む

同じ二式からもう一つの形も得られる。

$$\mathrm{YM}(A) = -8\pi^2 k + 2 \| F_A^- \|_{L^2}^2 .$$

したがって $k \leq 0$ の向き規約では、等号を達成するのは $F_A^- = 0$ の側である。どちらを ASD と呼ぶかは向きと位相数の規約に依存するが、重要なのは、固定した位相数の中でエネルギーを最小にする一次方程式が選ばれることである。

この導出は「ASD 方程式を思いついた」のではない。Chern–Weil 数が曲率の差を固定し、Yang–Mills エネルギーが曲率の和を測る。和と差が固定されると、片側成分を消すことが最小条件になる。

ASD なら Yang–Mills、逆は違う

Yang–Mills 方程式はエネルギーの Euler–Lagrange 方程式である。$A_t = A + ta$ と変分すると $\frac{d}{dt}F_{A_t}|_0 = d_A a$ なので

$$\frac{d}{dt}\mathrm{YM}(A_t)\Big|_0 = 2\int_X \langle d_A a, F_A\rangle = 2\int_X \langle a, d_A^* F_A\rangle.$$

従って臨界点は $d_A^* F_A = 0$ を満たす。ASD 接続では $*F_A = -F_A$ だから、Bianchi 恒等式 $d_A F_A = 0$ を使って

$$d_A^* F_A = -*d_A *F_A = *d_A F_A = 0.$$

よって ASD は Yang–Mills 解である。しかし Yang–Mills 方程式はエネルギーの全ての臨界点を含み、鞍点も許す。ASD は指定した位相数で絶対最小を達成する特別な Yang–Mills 解であり、両者は同値ではない。

変分計算の境界項

上の変分では閉多様体であることを使っている。実際、

$$\int_X \langle d_A a, F_A\rangle = \int_X \langle a, d_A^* F_A\rangle$$

は形式的随伴の定義であり、境界があれば境界項が出る。本書では閉 4 多様体を基本仮定にしているため、この境界条件の問題を避けられる。境界付き多様体でゲージ理論を行う場合には、境界条件や Floer 理論が必要になり、別の教材の主題になる。

ASD 方程式はなぜ一次か

Yang–Mills 方程式 $d_A^* F_A = 0$ は、接続 A に関して二階の非線形方程式である。一方、ASD 方程式

$$F_A^+ = 0$$

は曲率を含むので A に関して一階である。一次方程式の方がモジュライ空間を作りやすいだけでなく、エネルギー最小性と Bianchi 恒等式によって Yang–Mills 方程式を自動的に満たす。この「一次方程式が二階方程式の特別解を選ぶ」という構造が、Donaldson 理論の出発点である。

具体例：BPST インスタントンの尺度

S^4 を $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ と見なし、位相電荷 1 の BPST インスタントン族を考える。中心 x_0 と尺度 $\rho > 0$ を持ち、曲率密度は定数倍を除いて

$$|F_{A_{\rho,x_0}}(x)|^2 \sim \frac{\rho^4}{(\rho^2 + |x - x_0|^2)^4}$$

となる。$\rho \to 0$ で高さは増し幅は縮むが、積分エネルギーは $8\pi^2$ のまま変わらない。実際、4 次元極座標の体積要素が定数倍の $r^3 dr$ であることを使い、$r = \rho s$ と置換すると

$$\int_0^\infty \frac{\rho^4 r^3}{(\rho^2 + r^2)^4}\, dr = \int_0^\infty \frac{s^3}{(1+s^2)^4}\, ds$$

となり、ρ が完全に消える。これは第 11 章のバブリングの局所模型である。

この例は二つのことを同時に教える。第一に、ASD 解は実在する。第二に、解空間はコンパクトとは限らない。中心 x_0 は動けるし、尺度 ρ は 0 へ近づける。したがって「エネルギー最小解を数える」だけでは不変量にならず、ゲージ商、正則性、コンパクト化が必要になる。

尺度パラメータはなぜ危険か

BPST インスタントンの尺度 ρ は、単なる座標の取り方ではない。ρ が小さくなると曲率密度は一点に集中し、任意の固定された小球の外では接続が平坦に近づく。一方で全エネルギーは変わらない。したがって、解列は「どこかへ無限遠に逃げる」のではなく、多様体上の一点へ潰れる。

この現象はコンパクト性の失敗として最も重要である。モジュライ空間を普通の意味で閉じようとすると、$\rho = 0$ の極限は滑らかな接続ではない。しかし失われたものは完全に消えるのではなく、位置 x_0 と位相電荷として残る。第 11 章の Uhlenbeck コンパクト化は、この残り方を正確に記録する。

解をそのまま数えられない理由

A が ASD なら任意のゲージ変換 g に対して A^g も ASD である。従って解集合には関数空間の次元だけ冗長性があり、そのままでは有限次元の幾何にならない。一方、単純に各軌道から代表を一つ選ぼうとしても、全体で連続な選択が存在するとは限らない。

次章の課題は、まず局所的に代表を選ぶことだ。ゲージ軌道に横断する Coulomb スライスを作り、商空間を解析可能な座標へ移す。

Part III　モジュライ空間の局所構造

第 7 章　なぜゲージで割るのか

この章の作戦

この章では「方程式を解く」前に、「同じ解を何度も数えない」ための座標を作る。流れは有限次元の線形代数と同じである。

1. 対称性が動かす方向を微分して求める。
2. その方向に直交する面を選ぶ。
3. 各軌道がその面と一度だけ交わることを示す。
4. 固定点ではこの議論が壊れることを確認する。

接続の空間では、1 が $d_A\phi$、2 が $d_A^* a = 0$、3 が局所スライス定理、4 が可約接続である。以下では、まず行列でこの四段階を計算してから、ゲージ理論へ移す。

有限次元の予行演習：冗長な座標を除く

写像

$$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad q(x, y) = x$$

を考え、変換 $(x, y) \mapsto (x, y + t)$ を同じ点の別表示とみなす。軌道は縦線であり、その接方向は

$$\frac{d}{dt}(x, y + t)\Big|_{t=0} = (0, 1)$$

である。横軸 $S = \{(x, 0)\}$ は軌道方向に直交し、各軌道とちょうど一度交わる。したがって商 $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ は、抽象的な同値類の集合として扱うより、横軸上の座標 x で扱う方がよい。

この模型で、点 (x, y) を横軸へ移す変換量は $t = -y$ と明示的に解ける。ゲージ理論で同じ役割を果たす方程式が

$$d_A^* d_A \phi = -d_A^* a$$

である。右辺の符号は、本章で採るゲージ作用 $A^g = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$ と $g = e^{\phi}$ の規約から来る。左辺を逆にできれば、接続 $A + a$ を軌道に沿って Coulomb スライスへ動かす ϕ が決まる。

同じ場の別表示を除く

ASD 方程式はエネルギー最小解を選んだが、解 A と A^g は同じ幾何を異なるフレームで表示している。接続全体のアフィン空間を $\mathcal{A}(P)$、ゲージ群を $\mathcal{G}(P)$ と書けば、調べたいのは

$$\mathcal{M}_k = \{A \in \mathcal{A}(P) : F_A^+ = 0\}/\mathcal{G}(P)$$

である。これは単なる集合の商では不十分で、局所座標、接空間、向き、コンパクト化を持つ解析的な商でなければならない。

無限小ゲージ変換を確認する。$g_t = \exp(t\phi)$ とすると

$$\frac{d}{dt} A^{g_t}\Big|_{t=0} = d_A \phi.$$

従って軌道の接方向は $\operatorname{im} d_A \subset \Omega^1(X; \operatorname{ad} P)$ である。接続 $A + a$ を軌道に横断させる自然な条件は

$$d_A^* a = 0$$

であり、これを Coulomb ゲージ条件と呼ぶ。

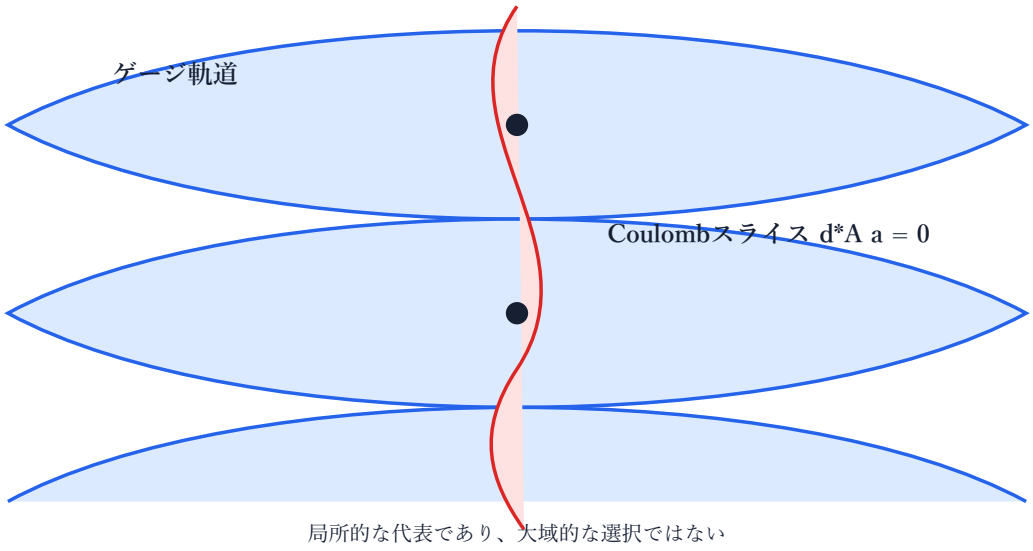


図 9: 接続空間を走るゲージ軌道と、それに横断する局所 Coulomb スライス。

スライスはなぜ存在するか

$A + a$ に小さなゲージ変換 e^{ϕ} を施し、Coulomb 条件を満たす ϕ を探す。一次近似では

$$d_A^*(a + d_A \phi) = 0, \quad d_A^* d_A \phi = -d_A^* a.$$

左辺は 0 形式上の楕円作用素である。A が既約、すなわち共変定数な随伴切断が中心から来るもの以外にないなら、適切な中心の処理後に逆作用素を持つ。非線形項は Sobolev 乗法評価で制御し、陰関数定理を適用する。

> **i** 引用定理｜局所スライス定理（証明アーキテクチャ、深度 C）
>
> A の近傍で、各ゲージ軌道は小さな Coulomb スライスと一意に交わる。ただし安定化群が非自明なら一意性はその有限次元作用を除いた意味になる。解析には Sobolev 完備化、楕円評価、非線形写像の滑らかさが必要である。[5]

ソボレフ完備化は何をしているか

ここで一度、解析の足場を明示しておく。$\mathcal{A}(P)$ は滑らかな接続の空間としては Fréchet 空間であり、そのままでは通常の Banach 空間の陰関数定理を使えない。

まず一変数の例で読む。区間 $[0,1]$ 上の L^2 関数は二乗積分可能な関数であり、点ごとの値よりも平均的な大きさを測る。$H^1 = L^2_1$ は、関数自身と一階の弱微分がともに L^2 に入る空間である。弱微分とは、古典的に微分できない点があっても、部分積分の恒等式

$$\int_0^1 f\,\varphi' = -\int_0^1 g\,\varphi$$

が全ての滑らかなテスト関数 φ に対して成り立つとき、g を f の微分として扱うという定義である。例えば角を持つ絶対値関数は古典的には角で微分できないが、弱微分の意味では扱える。強収束はノルムそのものが近づくこと、弱収束は全てのテスト対象で評価した値が近づくことであり、コンパクト性ではしばしば弱収束から始めて楕円正則性で滑らかさを回復する。

ゲージ理論でソボレフ空間を使うのは、この一変数の考えを多様体上の微分形式と束の切断へ拡張しているだけである。粗い対象を最終目的にするのではなく、微分、積、商、陰関数定理を Banach 空間の上で正しく使うために、いったん完備な作業場を作る。そこで固定した滑らかな接続 A_0 を基点に

$$\mathcal{A}_k = A_0 + L^2_k\Omega^1(X;\mathrm{ad}\ P), \quad \mathcal{G}_{k+1} = L^2_{k+1}(X,G)$$

と完備化する。4 次元では $k>2$ を選ぶと $L^2_k \hookrightarrow C^0$ であり、積や合成が連続に扱える。ゲージ群を一階高い $k+1$ にするのは、$g(A) = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$ に微分 dg が現れるからである。

この選択は「粗い接続を本当に研究対象にする」という意味ではない。Banach 多様体上で解いたあと、楕円正則性により、滑らかなデータから来る弱解は適切なゲージで滑らかになる。完備化は、無限次元の微分を正当化するための足場である。

ここで添字の差を具体的に確認する。$g \in L^2_{k+1}$ なら、弱微分 dg は L^2_k に属する。従って

$$g^{-1}Ag + g^{-1}dg$$

の二項はともに L^2_k の 1 形式になる。もしゲージ変換も L^2_k にすると、dg は一階低い L^2_{k-1} にしか入らず、接続空間 $\mathcal{A}_k$ を保つ作用にならない。ゲージ群を一階高く取る理由は、この型合わせである。

スライス方程式の非線形項

一次近似だけを見ると、$d_A^* d_A \phi = -d_A^* a$ を解けばよいように見える。しかし実際のゲージ変換は線形ではない。本書では接続へのゲージ作用を

$$A^u = u^{-1}Au + u^{-1}du$$

と固定する。$u = e^{\phi}$ として、ϕ と a をともに小さい量と数えると、Baker–Campbell–Hausdorff 展開から

$$u(A+a) - A = a + d_A\phi + [a,\phi] - \frac{1}{2}[\phi, d_A\phi] + O_{\geq 3}(a,\phi)$$

となる。ここで $O_{\geq 3}(a,\phi)$ は ϕ, a の総次数が 3 以上の項を表す。例えば $[\phi,[\phi,a]]$ は総次数 3 なので、この二次までの表示では剰余に含める。一次項だけを取り出せば $a + d_A\phi$ であり、符号は上の無限小計算

$$\frac{d}{dt} A^{e^{t\phi}}\Big|_{t=0} = d_A\phi$$

と一致する。交換子項 $[a,\phi]$ は $u^{-1}au$ から、$-\frac{1}{2}[\phi, d_A\phi]$ は $u^{-1}Au + u^{-1}du$ の二次項から出る。従って求める方程式は

$$\Psi(\phi, a) = d_A^*(u(A+a) - A) = 0$$

であり、ϕ についての微分が $+d_A^* d_A$ になる、というのが本当の入力である。方程式を解くとき右辺へ移せば $d_A^* d_A \phi = -d_A^* a + \text{非線形項}$ となる。$d_A^* d_A$ の核は H^0_A、つまり無限小安定化群である。既約性を仮定する理由は、ここで逆写像を得るためであり、単なる技術的な好みではない。

読者がここで持つ自然な疑問は「なぜ $d_A^* a = 0$ という条件だけで軌道と一回だけ交わると言えるのか」である。答えは、d_A^* が軌道方向 $d_A\phi$ の形式的随伴であり、L^2 内積に関して

$$\langle a, d_A\phi\rangle_{L^2} = \langle d_A^* a, \phi\rangle_{L^2}$$

となるからである。Coulomb 条件は「軌道方向に直交する」という幾何的条件を微分方程式で書いたものに他ならない。

有限次元模型：円周作用をスライスで割る

無限次元の商が見えにくいときは、$\mathbb{R}^2$ 上の S^1 作用を考えるとよい。S^1 は原点を中心に回転し、軌道は円である。点 $p=(r,0)$、$r>0$ の近くでは、軌道方向は縦方向、横方向の直線は軌道に横断するスライスになる。近くの各軌道はこの横線と一度だけ交わる。

しかし原点では事情が変わる。原点は S^1 全体で固定されるので安定化群が大きい。どの方向をスライスに選んでも、商 $\mathbb{R}^2/S^1$ の原点近くは通常の滑らかな 1 次元多様体というより、半直線の端点である。

接続空間でも同じことが起こる。既約接続の近くでは Coulomb スライスが横断座標を与えるが、可約接続では安定化群が大きく、商に特異性が出る。有限次元模型の「原点」が、ゲージ理論では可約軌跡に対応する。

可約解が作る特異性

$A^g=A$ を満たすゲージ変換全体を安定化群 Γ_A と呼ぶ。$SU(2)$ 接続が既約なら典型的に中心 $\{\pm 1\}$ だけだが、可約接続ではより大きい。商の局所模型はスライスそのものではなく S_A/Γ_A になるため、安定化群が増える点でオービフォールド型またはより悪い特異性が現れる。

従って「ゲージで割れば冗長性が消える」だけでは足りない。既約性条件を確保するか、特異層を別に管理する必要がある。また全体でスライスを一枚選べない問題は残り、局所チャートを貼るという通常の多様体と同じ発想を使う。

用語をここで固定する。本書では、$\mathcal{G}(P)$ を**ゲージ群**、その作用の軌道を**ゲージ軌道**、局所的な横断面を**局所スライス**、商を**モジュライ空間**と呼ぶ。英語は記号や文献検索に必要な初出に限って併記する。

例：平坦な自明接続で何が壊れるか

閉 4 多様体上の自明 $SU(2)$ 束を考え、平坦な自明接続 $A=d$ を取る。このとき定数写像 $X\to SU(2)$ は A を固定する。つまり安定化群は中心だけではなく、少なくとも全体の $SU(2)$ を含む。無限小にも、定数 $\mathfrak{su}(2)$ 値関数は $d_A\phi=0$ を満たすので $H^0_A\neq 0$ である。

この例では、スライス方程式の線形化 d^*d は定数関数を核に持つ。従って逆作用素は存在しない。商の局所構造は「Banach 空間を滑らかに割ったもの」ではなく、安定化群作用を持つ特異な局所模型になる。Donaldson 理論でしばしば既約接続に制限するのは、見た目を整えるためではなく、商空間を多様体として扱える地点を確保するためである。

何を次章へ渡したか

この章で得たものは、モジュライ空間そのものではなく、モジュライを局所的に調べるための座標候補である。

1. 接続の変化は $a\in\Omega^1(\mathrm{ad}\ P)$ で表す。
2. ゲージ方向は $d_A\phi$ で表す。
3. それに横断する代表は $d_A^*a=0$ で選ぶ。
4. この選択は既約性と Sobolev 解析に支えられる。

残った方程式は ASD 条件である。スライスを入れたあと、ASD 方程式の線形化がどのような有限次元情報を持つかを調べなければならない。

次の線形化

スライスはゲージ方向を除いた。次に ASD 方程式を $A+a$ で展開すると

$$F^+_{A+a}=F^+_A+d^+_Aa+(a\wedge a)^+.$$

線形項 d^+_Aa とゲージ方向 $d_A\phi$ が連続して並ぶ。$d^+_Ad_A=0$ が ASD 条件から従うため、この二つは複体を作る。次章では「方程式を線形化した作用素」だけでなく、「対称性も含めた複体」が正しい変形問題であることを見る。

i 節内演習：軌道とスライスを有限次元で見る

$\mathbb{R}$ が $\mathbb{R}^3$ に $t\cdot(x,y,z)=(x+t,y,z)$ と作用する。点 (x,y,z) の軌道を求め、平面 $S=\{x=0\}$ が各軌道とただ 1 点で交わることを確かめよ。

解答。 軌道は

$$\mathcal{O}_{(x,y,z)}=\{(x+t,y,z):t\in\mathbb{R}\}=\{(s,y,z):s\in\mathbb{R}\}$$

である。S に入る条件は $x+t=0$ なので $t=-x$ と一意に決まり、交点は $(0,y,z)$ である。したがって商の局所座標は (y,z) であり、S はゲージ固定条件 $d_A^*a=0$ の有限次元模型になっている。

第 8 章　線形化すると複体が現れる

有限次元模型：核だけを接空間にできない理由

まず、未知量 $v\in\mathbb{R}^3$ に方程式

$$L(v_1,v_2,v_3)=v_3=0$$

を課す。線形化方程式の核は $\ker L=\{(v_1,v_2,0)\}$ で 2 次元である。ところが、v と $v+t(1,0,0)$ を同じ状態とみなす対称性があるなら、v_1 方向は幾何的な変形ではない。真の一次変形は

$$\ker L/\mathrm{span}\,\{(1,0,0)\}\cong\mathbb{R}$$

で、v_2 だけが残る。

これを写像の列として書くと

$$0\to\mathbb{R}\xrightarrow{G}\mathbb{R}^3\xrightarrow{L}\mathbb{R}\to 0,\qquad G(t)=(t,0,0),\quad L(v)=v_3$$

であり、$L\circ G=0$ である。この合成が 0 だから、$\mathrm{im}\,G\subset\ker L$ となり、商が定義できる。ASD 変形複体は、この有限次元計算で G を d_A、L を d_A^+ に置き換えたものである。

接空間は核だけではない

ASD 接続 A の近くで $A+a$ も ASD となる条件は

$$d_A^+a+(a\wedge a)^+=0.$$

一次近似だけなら $d_A^+a=0$ である。しかし $a=d_A\phi$ はゲージ変換による見かけの変形なので、モジュライの接空間は $\ker d_A^+$ そのものではなく商

$$\frac{\ker(d_A^+:\Omega^1\to\Omega^2_+)}{\mathrm{im}(d_A:\Omega^0\to\Omega^1)}$$

でなければならない。

なぜ本当に複体か

随伴束値 0 形式 ϕ に対し $d_A^2\phi=[F_A,\phi]$ である。自己双対部分を取ると

$$d_A^+d_A\phi=[F_A^+,\phi]=0$$

となる。最後の等号に ASD 条件を使った。従って

$$0\to\Omega^0(\mathrm{ad}\,P)\xrightarrow{d_A}\Omega^1(\mathrm{ad}\,P)\xrightarrow{d_A^+}\Omega^2_+(\mathrm{ad}\,P)\to 0$$

は複体である。これは記号上の飾りではなく、対称性・変形・方程式の障害を一列に配置する。

ここでBianchi恒等式を使っているわけではない点を明確にしておく。Bianchi恒等式は $d_A F_A = 0$ であり、曲率そのものの共変外微分についての恒等式である。一方、いま必要なのは「無限小ゲージ変換 $d_A\phi$ がASD方程式の線形化の核に入る」ことであり、計算対象は $d_A^+ d_A \phi$ である。従って

$$d_A^+ d_A \phi = (d_A^2 \phi)^+ = ([F_A, \phi])^+ = [F_A^+, \phi]$$

と進み、最後に $F_A^+ = 0$ を使う。ASD条件なしにはこの列は一般に複体ではない。この一点を取り違えると、解空間の外でも同じ複体があるかのように見えてしまう。

コホモロジーを

$$H_A^0 = \ker d_A, \quad H_A^1 = \ker d_A^+ / \mathrm{im}\ d_A, \quad H_A^2 = \mathrm{coker}\ d_A^+$$

と書く。H_A^0 は無限小安定化群、H_A^1 は無限小モジュライ、H_A^2 は非線形方程式を解く際の障害である。

コホモロジーは名前ではなく役割で覚える

この三つはde Rhamコホモロジーの類似物だが、単なる記法の借用ではない。各次数はモジュライ問題の失敗の仕方を測る。

まず H_A^0 は、A を動かさない無限小ゲージ変換である。$H_A^0 \neq 0$ なら、同じ幾何を表す座標が余分に残り、商に特異性が出る。

次に H_A^1 は、方程式を一次まで保つ変形を、見かけのゲージ変形で割ったものである。従って正則な点ではモジュライの接空間になる。

最後に H_A^2 は、一次解を実際の非線形解へ持ち上げるときの障害である。一次近似で $d_A^+ a = 0$ を満たしても、二次項 $(a \wedge a)^+$ が残る。この残りを消す先が余核方向にあると、陰関数定理だけでは解けない。

この区別がないと、後で「指数が0だから点が有限個ある」と誤読してしまう。正しくは、指数は

$$\dim H_A^1 - \dim H_A^0 - \dim H_A^2$$

という差であり、三つの空間の個別の大きさを決めるものではない。

上の有限次元模型では

$$H^0 = \ker G = 0, \qquad H^1 = \ker L / \mathrm{im}\ G \cong \mathbb{R}, \qquad H^2 = \mathrm{coker}\ L = 0$$

である。従って指数は1で、実際に商の解空間も1次元である。これに対して $L = 0$ と変更すると $H^2 \cong \mathbb{R}$ が生じ、指数だけから零点集合の形を決められない。H_A^2 を「余った方程式方向」と読む準備がここでできる。

de Rham複体との対応

この複体の役割は、de Rham複体と比較すると理解しやすい。閉1形式 α は局所的には関数の微分に似ているが、大域的には $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ によって「本当に新しい変形」かどうかが測られる。同様に、$d_A^+ a = 0$ はASD方程式の一次近似を保つが、$a = d_A\phi$ なら単なるゲージ表示の変更である。商を取って初めて H_A^1 が現れる。

一方、de Rham複体では $d^2 = 0$ が恒等的に成り立つ。ASD変形複体では

$$d_A^+ d_A \phi = [F_A^+, \phi]$$

なので、$F_A^+ = 0$ という方程式を満たす点でだけ複体になる。つまりこの複体は背景接続 A がASD解であることに依存している。解空間の外では同じ列は複体ではない。

この違いは重要である。ASD変形複体は、固定された多様体の普遍的なコホモロジーではなく、解 A の近くのモジュライを読むための局所的なコホモロジーである。

主記号は高周波を入れると見える

次に楕円性を判定するが、主記号をいきなり書くと「なぜ最高階部分だけを見るのか」が見えにくい。基本は一変数の計算である。実直線上で

$$D = \frac{d}{dx}$$

を高周波の指数関数 $e^{i\xi x}$ に作用させると

$$D(e^{i\xi x}) = i\xi e^{i\xi x}$$

である。二階作用素なら

$$-\frac{d^2}{dx^2}e^{i\xi x} = \xi^2 e^{i\xi x}.$$

つまり、微分作用素の最高階部分は、周波数 ξ に関する最高次数の項として現れる。たとえば

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + a(x)\frac{d}{dx} + b(x)$$

では、高周波 $|\xi| \gg 1$ に対して支配的なのは ξ^2 の項であり、$a(x)i\xi$ や $b(x)$ は低次である。最高階部分を各点と非零共変ベクトル ξ で取り出したものが主記号である。

ASD 変形複体では、d_A や d_A^+ の最高階部分だけを見ると、接続 A の交換子項は低階項として消え、$\xi\wedge$ と $\pi_+(\xi\wedge\cdot)$ が残る。したがって、これから行う主記号列の計算は、方程式とゲージ方向が高周波で噛み合っているかを調べる計算である。

楕円性は主記号で判定する

非零共変ベクトル ξ に対する主記号は

$$0 \to \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\xi\wedge} \Lambda^1 \otimes \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\pi_+(\xi\wedge\cdot)} \Lambda^2_+ \otimes \mathfrak{su}(2) \to 0.$$

局所正規直交枠で $\xi = e^1$ とすれば、第一写像の像は e^1 成分、第二写像の核も同じ 1 次元成分になり、第二写像は残る 3 次元から Λ^2_+ へ同型になる。Lie 代数成分はテンソル積されるだけなので完全性は保たれる。よって ASD 変形複体は楕円的である。[4]

主記号計算を少し開く

上の「$\xi = e^1$ とすれば」という一文を、実際に見える形にしておく。向き付き正規直交基底 $e^1, \dots, e^4$ を取り、自己双対 2 形式の基底を

$$\omega_1 = e^{12} + e^{34}, \quad \omega_2 = e^{13} - e^{24}, \quad \omega_3 = e^{14} + e^{23}$$

とする。1-形式

$$\alpha = a_1 e^1 + a_2 e^2 + a_3 e^3 + a_4 e^4$$

に対し、$e^1 \wedge \alpha$ の自己双対部分は

$$\pi_+(e^1 \wedge \alpha) = \frac{1}{2}(a_2\omega_1 + a_3\omega_2 + a_4\omega_3)$$

である。従って $\pi_+(e^1\wedge\alpha) = 0$ なら $a_2 = a_3 = a_4 = 0$、つまり α は e^1 の倍数である。これはちょうど前の写像 $\mathfrak{su}(2) \to \Lambda^1 \otimes \mathfrak{su}(2)$ の像である。

この計算の意味は大きい。楕円性は、方程式が局所的に「足りない方向」を持たないことを主記号レベルで言っている。無限次元の接続空間から有限次元のモジュライが出る入口は、この完全性である。

ゲージ固定して一つの作用素にまとめる

複体を一つの作用素へまとめると

$$D_A = d_A^* \oplus d_A^+ : \Omega^1(\mathrm{ad}\ P) \to \Omega^0(\mathrm{ad}\ P) \oplus \Omega^2_+(\mathrm{ad}\ P).$$

$d_A^* a = 0$ はスライス条件、$d_A^+ a = 0$ は線形化 ASD 条件である。従って $\ker D_A$ は調和代表として H_A^1 と同一視でき、$\operatorname{coker} D_A \cong H_A^0 \oplus H_A^2$ となる。

この同一視を一行で済ませず確認する。第 7 章の規約では、e^ϕ による無限小ゲージ変換は a を $a + d_A\phi$ へ動かす。従って $a \in \ker d_A^+$ の同値類に対し、$a + d_A\phi$ が Coulomb 条件を満たすよう

$$d_A^* d_A \phi = -d_A^* a$$

を解く。可約性がなく、中心方向を除いて逆が取れれば、各同値類は $d_A^* a = 0$ を満たす代表を一つ持つ。その代表は $D_A a = 0$ である。つまり「商で定義した H_A^1」と「一つの楕円作用素の核」は、局所スライスを通じて同じ有限次元空間になる。

変形複体から Kuranishi 模型への橋

次章以降で使うために、非線形方程式との関係をもう一段だけ準備する。Coulomb スライス上の ASD 写像を

$$\Phi(a) = d_A^+ a + (a \wedge a)^+$$

と書く。線形化は d_A^+ であり、スライス条件 $d_A^* a = 0$ を合わせると $D_A a = 0$ が一次変形を表す。ここで楕円性により、Ω^1 は有限次元の調和部分と無限次元の可解部分へ分解できる。形式的には

$$\Omega^1 = H_A^1 \oplus \operatorname{im}\, d_A \oplus \operatorname{im}\, d_A^{+,*}$$

という Hodge 型の分解を期待する。ここで $d_A^{+,*} : \Omega^2_+(\mathrm{ad}\ P) \to \Omega^1(\mathrm{ad}\ P)$ は d_A^+ の随伴であり、スライス条件に出る $d_A^* : \Omega^1 \to \Omega^0$ とは次数が違う。正確な Sobolev 次数や閉像性は楕円 Fredholm 理論で支える。重要なのは、無限次元問題のうち本当に残る自由度が H_A^1 と H_A^2 に圧縮されることである。

したがって、変形複体は「線形化をきれいに並べたもの」ではなく、非線形モジュライの局所形を有限次元へ押し込む設計図である。

次章では楕円性がなぜ有限次元性を与えるか、指数がどのように位相的公式へ変換されるかを追う。ただし指数はまだ実際のモジュライ次元ではない。その差を生む H_A^0, H_A^2 を忘れてはならない。

> **i** 節内演習：有限次元複体の核と余核
>
> 線形写像 $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ と $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $G(t) = (t, 0, 0)$、$L(x, y, z) = z$ で定める。$L \circ G = 0$ を確かめ、複体のコホモロジー $H^0 = \ker G$、$H^1 = \ker L / \operatorname{im} G$、$H^2 = \operatorname{coker} L$ を求めよ。
>
> **解答。** $L(G(t)) = L(t, 0, 0) = 0$ だから複体である。順に
>
> $$\ker G = 0, \qquad \ker L = \{(x, y, 0)\}, \qquad \operatorname{im} G = \{(x, 0, 0)\}$$
>
> なので $H^0 = 0$、$H^1 \cong \mathbb{R}$ で、代表元は $(0, y, 0)$ と取れる。また L は全射だから $H^2 = 0$ である。すなわち対称性方向を割った一次変形は 1 次元、障害空間は 0 次元である。

第 9 章　楕円性と指数が次元になるまで

常微分方程式との比較から始める

円周上の関数に作用する微分

$$\frac{d}{d\theta} : L^2_1(S^1) \to L^2(S^1)$$

を考える。核は定数関数で 1 次元である。像は平均 0 の関数全体なので、余核も定数関数で 1 次元になる。従って指数は $1 - 1 = 0$ である。未知関数は無限個の Fourier 係数を持つのに、核と余核は有限次元になった。

Fourier 級数 $u(\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}u_n e^{in\theta}$ では、微分は各係数を in 倍する。$n\neq 0$ の成分は逆に解け、解けないのは $n=0$ の有限個の成分だけである。楕円作用素の主記号が可逆であるという条件は、高周波成分がこのように制御され、有限個の低周波自由度だけが残ることの多次元版である。

前章の主記号計算から何を得たか

前章では、主記号を高周波の最高階部分として導入し、そのうえで ASD 変形複体の主記号列が完全になることを座標で確かめた。ここから分かるのは、方程式の本数を点ごとに数えるより強い事実である。高周波成分に限れば、ゲージ方向と ASD 方程式の線形化は余分な自由度を取り逃がさない。

方程式の本数を数えてはいけない

ASD 方程式は点ごとに 3 成分、接続は 4 成分、ゲージ自由度は 1 成分だから $4-3-1=0$、という素朴な差し引きは正しくない。微分作用素の核と余核は大域境界条件と位相に依存し、各点の階数だけでは決まらない。有限次元性を保証するのは、前章で確認した主記号列の完全性である。

Sobolev 完備化を選び、$D_A : L^2_k\Omega^1 \to L^2_{k-1}(\Omega^0\oplus\Omega^2_+)$ と見る。閉多様体上の楕円作用素には評価

$$\| a \|_{L^2_k} \le C\left(\| D_A a \|_{L^2_{k-1}} + \| a \|_{L^2} \right)$$

があり、Rellich コンパクト性と組み合わせると核と余核が有限次元、像が閉となる。つまり D_A は Fredholm 作用素である。

評価が有限次元性を生む仕組み

楕円評価の右辺に $\| a \|_{L^2}$ が残っているのは、核方向を完全には制御できないからである。しかし核が無限次元なら、核の中で L^2 正規直交列

$$D_A a_n = 0, \qquad \| a_n \|_{L^2} = 1, \qquad \langle a_n, a_m\rangle_{L^2} = 0 \quad (n\neq m)$$

を取れる。楕円評価に $D_A a_n = 0$ を入れると

$$\| a_n \|_{L^2_k} \le C \| a_n \|_{L^2} = C$$

となり、列は Sobolev ノルムで一様有界である。Rellich コンパクト性により、部分列は L^2 で強収束する。ところが L^2 正規直交列では

$$\| a_n - a_m \|^2_{L^2} = 2 \quad (n\neq m)$$

なので、Cauchy 部分列を持てない。これは矛盾であり、核は有限次元である。

像が閉であることも同じ評価から従う。$D_A a_n$ が収束する列に対し、a_n を核の L^2 直交補へ取り直す。この直交補上では核方向の自由度が消えているため、楕円評価と背理法から

$$\| a_n \|_{L^2_k} \le C' \| D_A a_n \|_{L^2_{k-1}}$$

型の評価が得られる。従って a_n は有界であり、弱収束とコンパクト埋め込みを使って極限 a を取り、閉グラフ性から極限値が $D_A a$ として像に入る。余核の有限次元性は、余核を $\ker D_A^*$ と同一視し、随伴楕円作用素 D_A^* に核の場合と同じ議論を適用して得る。

この段階で初めて、無限次元の PDE 問題から有限次元の線形代数が現れる。「方程式が楕円的である」という言葉は、この有限次元化を保証する具体的な解析命題を含んでいる。

像の閉性について、何が必要かをもう一度有限次元に近い形で見る。$D_A a_n \to b$ で、各 a_n を $\ker D_A$ に直交する代表に取り直したとする。もし

$$\| a_n \|_{L^2_k} \le C' \| D_A a_n \|_{L^2_{k-1}}$$

がこの直交補で成り立たなければ、$\| a_n \|_{L^2_k} = 1$ かつ $\| D_A a_n \| \to 0$ となる列を作れる。Rellich で L^2 収束部分列を取り、楕円評価に戻すと極限は非零の核元になる。しかし列は核に直交していたので矛盾する。これにより、核方向を除けば D_A は逆作用素に近い評価を持つ。余核は像の直交補であり、閉像性のもとで $\ker D_A^*$ と同一視できるため、随伴楕円作用素に同じ議論を適用できる。

主記号と楕円評価の役割は異なる。主記号は各点と非零共変ベクトル ξ で最高階部分だけを検査する局所的な代数条件である。楕円評価は、その条件から大域的なノルム制御を引き出す解析定理である。そして Fredholm 性は、閉多様体上で楕円評価とコンパクト埋め込みを組み合わせた帰結である。

$$\text{主記号の完全性} \Rightarrow \text{楕円評価} \Rightarrow \text{核・余核が有限次元} \Rightarrow \text{指数が定義できる}$$

この矢印列の最初は局所線形代数、中央は解析、最後は有限次元線形代数である。

指数が変形に強い理由

Fredholm 指数を

$$\operatorname{ind}\, D_A = \dim \ker D_A - \dim \operatorname{coker}\, D_A$$

と定義する。係数や計量を連続に変えて Fredholm 性が保たれる限り、指数は整数値連続関数なので一定である。この安定性が解析量を位相量へ変える入口になる。

$SU(2)$ 束で $c_2(P) = k$、X が閉・向き付きなら Atiyah–Singer 指数定理から

$$\operatorname{ind}\, D_A = 8k - 3(1 - b_1(X) + b_2^+(X))$$

を得る。単連結なら $b_1 = 0$ なので $8k - 3(1 + b_2^+)$ である。[4]

この式は局所の偏微分方程式から、k, b_1, b_2^+ という位相的数だけで決まる期待次元が出ることを示す。

指数は向きデータも運ぶ

指数は数として期待次元を与えるだけではない。Fredholm 作用素 D_A には行列式線束

$$\det D_A = \Lambda^{\max} \ker D_A \otimes (\Lambda^{\max} \operatorname{coker}\, D_A)^*$$

が付随する。正則な点では余核が消え、この線の向きがモジュライの接空間の向きを与える。したがって、指数計算は「次元を知る」段階であり、行列式線束の向きは「数える準備をする」段階である。

この二つは別問題である。指数が 0 でも向きが選べなければ符号付き数え上げは定義できない。逆に向きがあっても、コンパクト性がなければ数え上げは不変量にならない。第 12 章で使う向きの背後には、この Fredholm 行列式線束がある。

具体計算：$\mathbb{CP}^2$ と $S^2 \times S^2$

式が抽象的に見えるので、二つの基本例で数を出す。

$X = \mathbb{CP}^2$ では $b_1 = 0$、$b_2^+ = 1$ である。従って

$$\operatorname{ind}\, D_A = 8k - 3(1 + 1) = 8k - 6.$$

$k = 1$ なら期待次元は 2 である。ただし $b_2^+ = 1$ なので、後で見る計量依存性では壁越えを避けられない。この例は、指数計算ができることと、不変量がただちに計量独立になることが別問題であることを教えてくれる。

$X = S^2 \times S^2$ では交点形式は双曲形式で、$b_2^+ = 1$、$b_1 = 0$ である。従って同じく

$$\operatorname{ind}\, D_A = 8k - 6.$$

一方、$K3$ では $b_1 = 0$、$b_2^+ = 3$ なので

$$\operatorname{ind}\, D_A = 8k - 12.$$

同じ位相数でも、自己双対調和 2 形式の数が多いほど期待次元は小さくなる。これは、ASD 方程式が「自己双対方向を消す」方程式であり、背景多様体の自己双対方向の大きさを敏感に見ることの反映である。

もう一つ、S^4 を確認する。$b_1(S^4) = b_2^+(S^4) = 0$ なので

$$d(k) = 8k - 3.$$

$k = 1$ では $d(1) = 5$ である。ゲージ同値で割った位相数 1 の BPST インスタントン族では、中心が 4 自由度、尺度が 1 自由度を持つことと一致する。指数公式が「4 つの位置と 1 つの尺度」という具体的な幾何を再現することが分かる。

期待次元が負なら何を意味するか

例えば $K3$ で $k = 1$ とすると

$$\operatorname{ind} D_A = 8 - 12 = -4$$

である。負の期待次元は「負次元の多様体がある」という意味ではない。一般的な摂動や計量のもとでは、正則な解が存在しないことを期待する、という意味である。もし実際に解が存在すれば、その点では正則性が失敗しているか、安定化群や障害の寄与によって単純な次元予想から外れている。

この解釈は以後何度も使う。指数は存在定理ではない。存在する解の局所次元を無条件に与えるものでもない。指数は、正則で既約な解を仮定したときの期待次元である。

期待次元と実際の次元を区別する

コホモロジーで書けば

$$\operatorname{ind} D_A = \dim H^1_A - \dim H^0_A - \dim H^2_A.$$

既約なら中心を除いて $H^0_A = 0$ と扱える。さらに $H^2_A = 0$ なら $\dim H^1_A = \operatorname{ind} D_A$ である。しかし $H^2_A \neq 0$ なら、線形化は全射でなく、二次項が実際の解集合を切る。従って指数は仮想的な差であって、無条件の局所次元ではない。

> ⚠ 有限次元性の根拠
>
> 方程式の成分数ではなく、ゲージ固定後の楕円 Fredholm 作用素が有限次元核/余核を持つことが根拠である。指数を実次元と呼ぶには、安定化群と障害の消滅を別に示す必要がある。

Atiyah–Singer をどの深さで使っているか

本書では Atiyah–Singer 指数定理を完全証明しない。必要なのは、楕円作用素の解析的指数が主記号類から決まり、特性類の積分で計算できる、という形である。この章での使い方は次の通りである。

1. $D_A = d_A^* \oplus d_A^+$ は楕円作用素である。
2. その主記号は束 P と TX の位相型から決まる。
3. 指数定理により、解析的指数は対応する特性類の積分に等しい。
4. $SU(2)$ 束ではその積分が $8k - 3(1 - b_1 + b_2^+)$ に整理される。

つまり、証明の核心を外部化しているのは指数定理そのものであり、ASD 複体が楕円であること、どの作用素の指数を計算しているか、得られた数を実際の次元と混同してはいけないことは本文内で閉じている。

正則性への問い

線形化が全射でない接続を、計量や方程式への摂動で避けられるだろうか。避けられたとして、Sobolev 解は滑らかか、局所チャートはどのように作られるか。次章では陰関数定理と横断性を用い、期待次元を実際の滑らかなモジュライへ変える条件を明示する。

i 節内演習：主記号列を座標で確かめる

向き付けられた正規直交余標構 $e^1, \dots, e^4$ を取り、$\xi = e^1$ とする。ASD 複体の主記号列

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\xi\wedge} \Lambda^1 \xrightarrow{\pi_+(\xi\wedge\cdot)} \Lambda^2_+$$

について、第二写像の核が $\mathrm{span}\,\{e^1\}$ であることを示せ。

解答。 $a = \sum_i a_i e^i$ とし、$\omega_1 = e^{12} + e^{34}$、$\omega_2 = e^{13} - e^{24}$、$\omega_3 = e^{14} + e^{23}$ を自己双対基底に取ると

$$\pi_+(e^1 \wedge a) = \frac{1}{2}(a_2\omega_1 + a_3\omega_2 + a_4\omega_3).$$

したがって像が 0 であるための必要十分条件は $a_2 = a_3 = a_4 = 0$、すなわち $a = a_1 e^1$ である。これは第一写像の像と一致し、$\xi \neq 0$ で記号列が中央で完全になる。

第 10 章　滑らかなモジュライ空間を作る

線形化が全射なら零点集合は滑らかになる

有限次元の写像

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$$

を考える。原点での微分は $df_0(u, v, w) = w$ で全射である。従って $f^{-1}(0)$ は原点近くで

$$z = x^2 + y^2$$

という 2 次元の滑らかな曲面になる。接平面は $w = 0$、すなわち $\ker df_0$ である。非線形項 $x^2 + y^2$ は曲面を曲げるが、次元を壊さない。

無限次元でも構図は同じである。Coulomb スライスが定義域からゲージ方向を除き、d_A^+ の全射性が値域に余る方向がないことを保証する。この二条件がそろうと、Banach 空間版陰関数定理により、零点集合の接空間は H^1_A になる。

非線形方程式をスライス上で解く

ASD 接続 A の Coulomb スライス上で

$$\Phi(a) = d_A^+ a + (a \wedge a)^+ = 0, \quad d_A^* a = 0$$

を解く。$D\Phi_0 = d_A^+$ であり、$H^2_A = 0$ なら線形化はスライスから Ω^2_+ へ全射である。Banach 空間版陰関数定理により、0 の近くの解集合は H^1_A を接空間とする滑らかな多様体になる。irreducibility で $H^0_A = 0$ も満たせば、商の局所次元は指数に等しい。

H^2_A が消えない場合も構造は失われ切らない。Green 作用素を使って無限次元方向を解消すると、有限次元写像

$$\kappa : H^1_A \to H^2_A, \quad \kappa(0) = 0, \quad d\kappa_0 = 0$$

の零点として局所モジュライを表せる。これが Kuranishi 模型である。障害空間という名前は、H^2_A が非零だと変形が二次以上で妨げられることを正確に表す。

蔵西写像はどう作るか

上の有限次元写像を、もう少し構成として見る。楕円理論により、d_A^+ の像の直交補を H^2_A と同一視し、射影

$$\Pi : \Omega^2_+(\mathrm{ad}\ P) \to H^2_A$$

を取る。H^2_A に垂直な方向では、線形化 d_A^+ が右逆を持つ。そこで a を

$$a = h + \eta(h), \quad h \in H^1_A$$

の形で探し、H^2_A に垂直な成分

$$(1 - \Pi)\Phi(h + \eta) = 0$$

を陰関数定理で解く。残る方程式が

$$\kappa(h) = \Pi\Phi(h + \eta(h)) = 0$$

である。これが Kuranishi 写像で、局所モジュライは $\kappa^{-1}(0)$ に安定化群作用を割ったものとして表される。

$d\kappa_0 = 0$ であることも重要である。一次の障害はすでに H^1_A の定義で消してあるので、障害は二次以上で現れる。これが「一次変形は存在するのに、本当の曲線として伸びない」現象の数学的な場所である。

構成を入出力で整理すると、次の三段階である。

1. $h \in H^1_A$ を「一次まで許される変形」として選ぶ。
2. 無限次元だが逆に解ける方向を $\eta(h)$ として一意に補正する。
3. それでも H^2_A 方向に残る有限個の誤差を $\kappa(h)$ として測る。

従って Kuranishi 写像は、無限次元方程式を別の問題に置き換えて済ませるものではない。逆に解ける無限個の方向を消去し、逆に解けない有限個の方向だけを露出させる写像である。

有限次元模型：二次の障害

Kuranishi 写像の意味は、有限次元の方程式

$$f(x, y) = y^2 - x^3 = 0$$

を原点近くで見ると分かる。線形化 df_0 は 0 なので、一次近似は何も制限しない。すべての方向が一次変形に見える。しかし実際の零点集合は平面全体ではなく、cusp を持つ曲線である。

もっとモジュライ的に書けば、一次変形空間を $H^1 = \mathbb{R}^2$、障害空間を $H^2 = \mathbb{R}$ と見て、Kuranishi 写像

$$\kappa(x, y) = y^2 - x^3$$

の零点を取っている。$d\kappa_0 = 0$ でも、κ そのものが 0 とは限らない。ASD モジュライでも、H^1_A の元がすべて実際の解へ伸びるわけではなく、二次以上の方程式が残る。

この模型は、$H^2_A = 0$ の仮定がなぜ強いかを示している。値域が消えれば、残る Kuranishi 方程式そのものが消え、局所モジュライは本当に H^1_A によって滑らかに記述される。

一般的な計量は何を動かすのか

固定計量ですべての解が正則とは限らない。計量 g も変数に含めた普遍モジュライ問題を考え、射影

$$\pi : \mathcal{M}^{\mathrm{univ}} \to \mathrm{Met}(X)$$

の正則値を選ぶ。ここで用いる Sard–Smale の定理では、$\mathcal{M}^{\mathrm{univ}}$ と $\mathrm{Met}(X)$ を可分な Banach 多様体として完備化し、射影 π が C^r Fredholm 写像で、その微分可能性の階数 r が Fredholm 指数より大きいことを仮定する。このとき正則値となる計量は残余集合をなす。ここで「一般的」とは、何となく典型的という意味ではなく、完備距離化可能な関数空間で可算個の開稠密集合の共通部分に属するという意味である。

計量を動かすだけで可約を避けられない場合は、ホロノミー摂動など方程式側の摂動が必要になる。何を摂動したかを明示しなければ、不変量の定義域やコンパクト性が変わりうる。

有限次元では、放物線 $y = x^2$ と水平線 $y = c$ の交点が模型になる。$c > 0$ なら二点で横断し、$c = 0$ では接して線形化が全射でない。c を少し動かす操作が摂動に対応する。ただし、ゲージ理論では「解が見やすくなる値を選ぶ」のではなく、許された補助データの空間で横断性を満たす値が稠密に存在し、異なる選択が後のコボルディズムで同じ不変量を与えることまで示す必要がある。

横断性が解決すること、しないこと

横断性は、線形化が全射になるように補助データを選ぶ手段である。従って解決するのは H^2_A の消滅、つまり局所的な滑らかさである。解決しない問題もある。

まず、可約接続の安定化群は横断性だけでは消えない。可約を避けるには、束の位相型、計量条件、b_2^+ の仮定、または摂動の設計を別に見る必要がある。

次に、コンパクト性は横断性から出ない。正則なモジュライでも、解列がバブリングで逃げれば、点の数え上げは不変量にならない。

最後に、向きも別問題である。滑らかな多様体であっても、向きが選べなければ符号付き数え上げを定義できない。

この三つを分けると、モジュライ構成の流れが見えやすくなる。

段階	主な問題	使う道具
局所商	ゲージ重複と安定化群	スライス定理、irreducibility
局所滑らかさ	H^2_A	陰関数定理、Sard–Smale
大域閉性	解列の逃走	Uhlenbeck コンパクト性
数え上げ	符号と境界	行列式線束、コボルディズム

この表は実制作上のチェックリストでもある。ある章で「一般的にモジュライが滑らか」と言えても、それはコンパクト性や向きを自動的に含まない。逆に、コンパクト化の定理を引用しても、正則性がなければ境界付き多様体として数えることはできない。Donaldson 理論の証明が長くなるのは、これらを一つずつ別の定理で閉じる必要があるからである。

ソボレフ解から滑らかな解へ

Banach 多様体を作るため接続を L^2_k で完備化したが、最終的なモジュライは滑らかな接続で解釈したい。Coulomb ゲージで ASD 方程式は楕円型系となる。右辺の二次項を Sobolev 乗法で一段ずつ改善し、楕円正則性を繰り返し適用すれば、弱解はゲージ変換後に滑らかになる。従って完備化は解析の道具であり、新しい粗い解を不変量へ混入させるものではない。

正則性向上の一段目

局所 Coulomb ゲージで $A = A_0 + a$ と書くと、ASD 方程式とゲージ条件は概略

$$d^+_{A_0} a = -(a \wedge a)^+, \quad d^*_{A_0} a = \text{lower terms}$$

という楕円系になる。$a \in L^2_k$ で $k > 2$ なら、Sobolev 乗法により右辺は一つ低い空間で制御できる。楕円正則性は

$$\| a \|_{L^2_{k+1}(U')} \le C \left(\| D_{A_0} a \|_{L^2_k(U)} + \| a \|_{L^2(U)} \right)$$

の形で内部正則性を与える。これを局所チャートで繰り返すと、a は任意階の Sobolev 空間に属し、Sobolev 埋め込みから滑らかになる。

ここで重要なのは、正則性改善が方程式を使っていることである。任意の L^2_k 接続が滑らかになるわけではない。ASD という楕円方程式を満たすから、完備化の外へ迷い込んだように見える解が滑らかな世界へ戻ってくる。

向きは数える前に必要

0 次元モジュライの点を符号付きで数え、正次元モジュライでコホモロジー類を積分するには向きが必要である。局所的には行列式線束

$$\det D_A = \Lambda^{\max} \ker D_A \otimes (\Lambda^{\max} \operatorname{coker} D_A)^*$$

の向きを選ぶ問題になる。Donaldson 理論では $H^1(X;\mathbb{R}) \oplus H^2_+(X;\mathbb{R})$ のホモロジー向き等がこの選択を制御する。

0 次元の有限次元模型では、写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の正則零点 x_0 に付く符号は $f'(x_0)$ の符号である。$f(x)=x^2-1$ なら零点は $-1,1$ で、符号はそれぞれ $-1,+1$ だから符号付き和は 0 になる。行列式線の向きは、この「ヤコビ行列式の符号」を核と余核を持つ Fredholm 作用素へ拡張したものである。

局所的な滑らかさが得られても、モジュライがコンパクトとは限らない。解列が収束しなければ、点の数え上げもコボルディズムも境界から漏れる。第 6 章の小尺度インスタントンが示した通り、4 次元の尺度不変性は曲率集中を許す。次章では逃げ方を分類する。

> **i** 節内演習：Kuranishi 写像と接空間
>
> Kuranishi 写像の模型 $\kappa:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$、$\kappa(x,y)=x^2-y^3$ を考える。原点での線形化と零点集合を求め、線形化だけでは局所形が決まらないことを説明せよ。
>
> **解答。** 微分は
>
> $$d\kappa_{(x,y)}=(2x,-3y^2),\qquad d\kappa_{(0,0)}=(0,0)$$
>
> だから、線形化が与える形式的接空間は $\ker d\kappa_0=\mathbb{R}^2$ である。しかし実際の零点は $x^2=y^3$、すなわち $y\ge 0$ で $x=\pm y^{3/2}$ を満たす尖点であり、原点近傍の 2 次元多様体ではない。余核方向へ値を取る非線形障害写像 κ を残す必要がある。

Part IV　コンパクト化と Donaldson 理論

第 11 章　コンパクト性が壊れる仕方：バブリング

まず 1 変数の集中列を見る

関数

$$f_n(x)=n\,\mathbf{1}_{[0,1/n]}(x)$$

は、各点で素直に収束する関数列ではないが、積分は常に 1 である。連続関数 φ に対して

$$\int_0^1 f_n(x)\varphi(x)\,dx=n\int_0^{1/n}\varphi(x)\,dx\to\varphi(0)$$

なので、測度としては Dirac 測度 δ_0 に弱収束する。総量は消えず、一点へ集中したのである。

バブリングでも追跡する対象は接続係数そのものではなく、非負の曲率エネルギー測度 $|F_A|^2d\mathrm{vol}$ である。違いは、集中量が任意の実数ではなく、インスタントン数によって整数単位に量子化される点にある。

有界なエネルギーだけでは強収束しない

固定位相数 k の ASD 接続はエネルギー $8\pi^2k$ を持つため、一様な L^2 有界性がある。しかし 4 次元では L^2 曲率エネルギーが尺度不変なので、BPST インスタントンを半径 $\rho_n\to 0$ へ縮めても上界だけでは改善しない。曲率は一点へ集中し、接続列はその点を含む通常の位相では収束しない。

曲率測度

$$\mu_n=|F_{A_n}|^2d\mathrm{vol}$$

を考えると、弱極限は滑らかな部分と原子部分へ分かれる。

$$\mu_n\rightharpoonup |F_{A_\infty}|^2d\mathrm{vol}+8\pi^2\sum_{i=1}^{\ell}m_i\delta_{x_i},\quad m_i\in\mathbb{N}.$$

整数 m_i は局所的に拡大した極限が S^4 上のインスタントンを作ることから現れる。

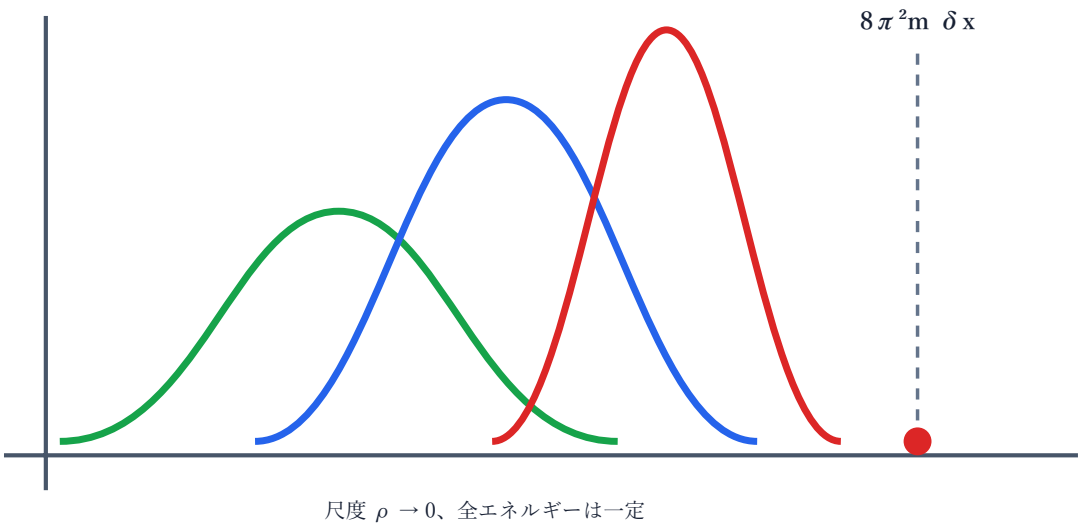


図 10: 同じ総エネルギーを保ったまま曲率密度が一点へ集中し、極限で位相数が原子として残る。

BPST インスタントンが示す尺度の消失

$\mathbb{R}^4$ 上の基本インスタントンは、中心 x_0 と尺度 $\rho > 0$ を持つ。局所式を細部まで使わなくても、曲率密度が

$$|F_{A_{\rho,x_0}}(x)|^2 \sim \frac{\rho^4}{(\rho^2 + |x - x_0|^2)^4}$$

の形を持つことを覚えておけばよい。積分は ρ に依存せず一定だが、$\rho \to 0$ とすると密度は x_0 に集中する。

これはコンパクト性失敗の模型である。接続の係数そのものが単に大きくなるのではない。エネルギーが一点へ集まり、極限で尺度情報が消える。Uhlenbeck コンパクト化が記録するのは、失われたインスタントンの位置と位相数であり、消えた尺度や向きの全てではない。

尺度不変性を積分で確認する

上の密度模型

$$e_\rho(r) = C\frac{\rho^4}{(\rho^2 + r^2)^4}$$

を 4 次元極座標で積分すると、体積要素は $r^3 dr\, d\Omega_3$ である。$r = \rho s$ と置けば

$$\int_0^\infty \frac{\rho^4}{(\rho^2 + r^2)^4} r^3\, dr = \int_0^\infty \frac{\rho^4}{\rho^8(1 + s^2)^4} \rho^3 s^3\, \rho\, ds = \int_0^\infty \frac{s^3}{(1 + s^2)^4}\, ds.$$

ρ が完全に消える。これが 4 次元の臨界性である。半径を小さくしても総エネルギーは減らず、ただ集中する。したがってエネルギー上界だけでは、尺度が 0 へ落ちる現象を防げない。

次元が 4 であることも計算に現れている。n 次元なら体積要素は $r^{n-1}dr$ なので、同じ置換で全体に ρ^{n-4} が残る。$n = 4$ のときだけ指数が 0 になり、縮尺を変えてもエネルギーが同じである。この臨界性が、4 次元ゲージ理論で尺度が消失する直接の理由である。

小エネルギーならゲージを選べる

コンパクト性の核心は、曲率が小さい球領域では接続を Coulomb ゲージへ入れ、

$$d^*a = 0, \quad \| a \|_{L^2_1(B)} \leq C \| F_A \|_{L^2(B)}$$

のような評価を得ることである。有限個の球領域でのみ小エネルギー閾値を超えられるため、その中心を除けば一様評価と Rellich コンパクト性が使える。対角列を取り、ゲージ変換後に A_n は $X \setminus \{x_1, \dots, x_\ell\}$ 上で A_∞ へ収束する。

> **i** 引用定理｜Uhlenbeck コンパクト性（証明の骨格、深度 C）
>
> 一様な L^2 曲率上界を持つ接続列から、有限個の集中点を除いてゲージ収束する部分列を取れる。ASD 列では極限も ASD で、除去可能特異点定理により低い位相数の束へ延長される。失われた位相数は有限個の整数重複度として記録される。難所は小エネルギー ゲージ固定と除去可能特異点定理である。[5]

エネルギー量子化の読み方

なぜ集中するエネルギーが $8\pi^2$ の整数倍になるのか。ASD 接続ではエネルギー恒等式により

$$\| F_A \|_{L^2}^2 = 8\pi^2 k$$

である。集中点の周りを拡大して見ると、極限は $\mathbb{R}^4$、一点コンパクト化後には S^4 上の有限エネルギー ASD 接続になる。除去可能特異点定理により、それは S^4 上の滑らかなインスタントンへ延長される。従って局所的に失われたエネルギーは、そのインスタントンの第二チャーン数に対応し、$8\pi^2 m$ となる。

ここで使っているのは、単なる測度収束ではない。PDE、ゲージ固定、除去可能特異点、特性類が連動して、連続的に見えたエネルギー損失を整数に量子化している。

理想インスタントンで閉じる

通常のモジュライ $\mathcal{M}_k$ に、低い位相数の ASD 接続と点の unordered tuple を加え、

$$\overline{\mathcal{M}}_k^U = \bigsqcup_{\ell=0}^{k} \mathcal{M}_{k-\ell} \times \mathrm{Sym}^\ell(X)$$

という Uhlenbeck コンパクト化を作る。右辺の点は「粒子を追加した」のではなく、接続から消えた尺度と位置のうち、極限で残る位置と位相数だけを記録する理想化対象である。

$\mathrm{Sym}^\ell(X) = X^\ell / S_\ell$ は、順序を忘れた ℓ 個の点の空間である。例えば $\ell = 2$ では (x_1, x_2) と (x_2, x_1) を同一視する。二つのバブルが同じ点へ集まる場合は対角成分 (x, x) が多重度 2 を表す。このため、集中点を単なる集合として記録するのではなく、重複を許す対称積が必要になる。

位相数 $k = 2$ の場合を展開すると、集合としての層は

$$\mathcal{M}_2 \sqcup \mathcal{M}_1 \times X \sqcup \mathcal{M}_0 \times \mathrm{Sym}^2(X)$$

となる。第一層はバブルなし、第二層は位相数 1 を接続に残して 1 個を点へ失った場合、第三層は 2 単位を点へ失った場合である。層同士をどの位相で貼るかがコンパクト化の本体であり、単なる非交和を取るだけではない。

層間の余次元が十分大きければ、低次元数え上げはバブリング境界の影響を受けない。一方、1 次元パラメータ付き モジュライでは端として現れる可能性を次元数え上げで毎回確認しなければならない。

余次元を実際に見積もる

$SU(2)$ の ASD モジュライで位相数を一つ落とすと、期待次元は

$$d(k) - d(k-1) = 8$$

だけ下がる。一方、バブルの位置 $x \in X$ を記録することで 4 次元が戻る。従って一つのバブルを持つ層は、粗く言えば主層に比べて余次元 4 である。

この数が重要である。0 次元モジュライのコンパクト化では、余次元 4 の層は一般には現れない。1 次元パラメータ付き モジュライでも、次元数え上げ上は端になりにくい。もちろん、これは正則性や可約の問題が別途制御されている場合の話である。次元数え上げだけで全てを証明したことにはならないが、なぜ低次元の Donaldson 不変量でバブリングを避けられる場面があるのかを説明する。

ℓ 個の単純バブルが互いに異なる点へ生じるなら、位相数低下で 8ℓ 次元を失い、位置で 4ℓ 次元を戻すため、期待余次元は 4ℓ である。点が衝突する対角成分では対称積自体が特異な層を持つので、この単純計算だけでは局所形を決められない。そこで実際の境界解析には貼り合わせ定理が必要になる。

除去可能特異点定理は何を保証するか

集中点を除いた $X \setminus \{x_i\}$ 上で極限接続 A_∞ が得られても、そのままでは元の閉多様体上の接続ではない。除去可能特異点定理は、有限エネルギー ASD 接続が孤立特異点を越えて、適切な束上の滑らかな接続へ延長されることを保証する。

この結果がなければ、コンパクト化の境界は「穴の空いた多様体上の解」という扱いにくい対象になってしまう。延長定理により、低い位相数の通常の ASD モジュライと点の情報だけで境界を記述できる。

コンパクト化は目的でなく次の入力

コンパクト空間を得ただけでは不変量にならない。計量を変えたときのパラメータ付きモジュライが向き付きコボルディズムを作り、その境界が両端のモジュライだけであることを示す必要がある。可約、バブリング、壁越えが余分な境界を作らない条件は何か。次章で「PDE 解空間から数を取る」一般機械を組み立てる。

> **i** 節内演習：バブリング層の余次元
>
> $SU(2)$ ASD モジュライの期待次元を $d(k) = 8k - C$ とする。ℓ 個のインスタントンが点へ集中した層は、低い電荷のモジュライ $M_{k-\ell}$ と点配置 $\mathrm{Sym}^\ell(X)$ からなる。上位層との差を計算せよ。
>
> **解答。** 4 次元多様体上の 1 点は実 4 自由度を持つので、下位層の期待次元は
>
> $$d(k-\ell) + 4\ell = 8(k-\ell) - C + 4\ell = d(k) - 4\ell.$$
>
> したがって ℓ 点バブリング層の期待余次元は 4ℓ である。たとえば $\ell = 2$ なら余次元は 8 となる。この次元差が、低次元の切断モジュライでバブリング境界を避ける基本理由である。

第 12 章　PDE 解空間から数を取り出す一般原理

数を作る前に必要な五つの条件

偏微分方程式の解を有限個見つけても、それだけでは多様体の不変量にならない。少なくとも次を確認する必要がある。

1. **有限次元性**：ゲージ固定後の線形化が Fredholm である。
2. **正則性**：余核が消え、期待次元が実際の次元になる。
3. **向き**：各零点へ整合的に符号を付けられる。
4. **コンパクト性**：解の列が数え上げから逃げない。
5. **補助データからの独立性**：計量や摂動を変えた間をコボルディズムが結ぶ。

第 7〜11 章はこの順番を準備してきた。本章の仕事は、五条件を一つの数え上げへ接続することである。

0 次元なら点を数える

正則でコンパクトな 0 次元モジュライ空間 $\mathcal{M}$ は有限集合である。各点の行列式線束の向きから $\varepsilon([A]) = \pm 1$ を定め、

$$n = \sum_{[A] \in \mathcal{M}} \varepsilon([A])$$

と数える。向きを無視した点数は、パラメータを動かしたとき点が対生成・対消滅する現象を相殺できない。符号付き数え上げなら局所生成・消滅で寄与が $+1-1=0$ になる。

符号付き数え上げの有限次元模型

写像族

$$f_t(x) = x^2 - t$$

を考える。$t>0$ では零点が二つ、$t<0$ では零点がない。向きを無視した点数は 2 から 0 へ変わるので不変ではない。これは 1 次元の零点問題で、$t=0$ に非正則な零点が現れる。

一方、写像

$$g_s(x) = x - s$$

では零点は常に一つで、導関数は正なので符号は常に $+1$ である。より一般に、0 次元モジュライの点の符号は、線形化の determinant の向きで決まる。点が対生成するとき、二つの点は反対符号で現れるため、符号付き和は変わらない。

Donaldson 理論の向きは、この有限次元の「導関数の符号」を、楕円作用素の行列式線束へ拡張したものである。

より直接に計算するため、$f(x) = x^3 - x$ を取る。零点は $-1, 0, 1$ で、導関数は

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

だから符号は順に $+, -, +$、符号付き和は 1 である。グラフを小さく変形して零点が二つ増減しても、新しい二点の傾きは反対符号になる。符号なし個数は変わるが、符号付き和が保たれる仕組みを手で確認できる。

付録 A では、この行列式線束を Fredholm 作用素の核と余核から定義した。本文で使う符号付き数え上げは、単に点へ任意に符号を付ける操作ではなく、Fredholm 族の向きから強制される符号である。このため、向きの選択は不変量の定義の一部であり、後から好みで変える装飾ではない。

計量依存性をコボルディズムへ変える

二つの一般的な計量 g_0, g_1 を経路 g_t で結び、

$$\mathcal{W} = \bigcup_{t \in [0,1]} \{t\} \times \mathcal{M}(g_t)$$

を考える。普遍横断性が成り立てば $\mathcal{W}$ は 1 次元向き付き多様体になる。コンパクトで余分な境界がなければ

$$\partial \mathcal{W} = \mathcal{M}(g_1) \sqcup (-\mathcal{M}(g_0))$$

なので、向き付き境界の総数が 0 であることから $n(g_1) = n(g_0)$ を得る。

ここでコンパクト性を確認せずに「コボルディズムだから不変」と結論してはいけない。バブリング層や可約軌跡へ列が逃げれば、コンパクト化後の境界に新成分が加わる。

コンパクト化後に貼り合わせが必要な理由

コンパクト化で境界層を付け加えただけでは、まだ不変量の証明は終わらない。付け加えた層が、本当にモジュライの端として現れているかを知る必要がある。ここで貼り合わせ解析が使われる。

たとえばバブルを持つ理想インスタントンがコンパクト化の境界に現れたとする。貼り合わせ定理は、バブルの尺度を小さく選び、背景解と標準インスタントンを貼り合わせ、誤差を補正して真の ASD 解を作る。これにより、境界層の近くのモジュライがどのような局所形を持つかが分かる。

したがってコンパクト性は「逃げた列の極限を記録する」定理であり、貼り合わせは「記録された極限の近くに実際の解が存在する」ことを戻す定理である。境界寄与を数える議論では、この二つが対になって働く。

パラメータ付きモジュライ空間の線形化

g_t を動かすとき、方程式は

$$F_A^{+,g_t} = 0$$

である。線形化には接続方向 a だけでなく、計量方向 $\dot{g}$ も現れる。

$$(a, \dot{g}) \mapsto d_A^{+,g} a + \dot{\pi}_+(F_A)$$

ここで $\dot{\pi}_+$ はホッジ作用素、したがって自己双対射影の変化である。固定計量で d_A^+ が全射でなくても、計量方向が余核を埋めれば普遍モジュライは正則になりうる。これが一般的な計量の横断性の中身である。

ただし、F_A の形によっては計量方向が十分に効かない。特に可約や低い位相数の特殊解では、計量を動かすだけで全射性を得られないことがある。その場合、方程式への摂動を導入するか、対象を避ける仮定を置く必要がある。

$b_2^+ > 1$ の役割

可約が現れる条件は、概略的にはあるコホモロジー類の自己双対調和部分が 0 になることとして書ける。計量空間内でその条件は b_2^+ 個の実条件を課す。1 パラメータ経路がこの壁を避けるには余次元が 2 以上、すなわち $b_2^+ > 1$ が自然な安全条件になる。

$b_2^+ = 1$ では壁は余次元 1 で、経路が横切る可能性がある。この場合、不変量は計量から完全に独立ではなく部屋に依存し、壁越え公式が差を記述する。「例外」ではなく、仮定を弱めたときに何が境界へ現れるかを示す構造である。

壁越えを境界として見る

$b_2^+ = 1$ のとき、二つの計量を結ぶ経路は可約の壁を横切ることがある。パラメータ付きモジュライをコンパクト化すると、境界は

$$\mathcal{M}(g_1) \sqcup (-\mathcal{M}(g_0))$$

だけではなく、壁上の可約を中心とする局所模型から来る成分を持つ。この余分な境界の符号付き寄与が壁越え項である。

この見方をすると、$b_2^+ > 1$ の仮定は突然の魔法ではない。1 パラメータ・コボルディズムが避けるべき悪い集合の余次元を上げ、余分な境界を消すための仮定である。

正次元モジュライ空間ではコホモロジー類を積分する

Donaldson 理論では普遍束から得る μ 写像

$$\mu : H_i(X) \to H^{4-i}(\mathcal{B}^*)$$

を用いる。その前に、この記号に入る特性類を整理しておく。$P \to X$ が Donaldson 理論で使う $SO(3)$ 束なら、$w_2(P) \in H^2(X; \mathbb{Z}/2)$ はその束の第二 Stiefel–Whitney 類である。これは第 15 章で接束に対して使う $w_2(TX)$ とは別の対象で、前者は補助束 P の貼り合わせ障害、後者は接束の spin 構造の障害を測る。$SO(3)$ 束は向き付き 3 次元実ベクトル束に対応するので $w_1(P) = 0$ であり、Spin へ持ち上げる障害として $w_2(P)$ が現れる。

もう一つ使うのが Pontryagin 類である。随伴束 $\mathrm{ad}\, P$ は実 3 次元ベクトル束で、$p_1(\mathrm{ad}\, P) \in H^4(X; \mathbb{Z})$ を持つ。モジュライ空間上の条件を作るには、個々の X 上の束だけでなく、$X \times \mathcal{B}^*_P$ 上の普遍 $SO(3)$ 束 $\mathbb{P}$ を使う。ここで $\mathcal{B}^*_P$ は既約接続をゲージで割った空間である。普遍束は構成に基点付きゲージ群や中心の処理を伴うため、厳密な定義は標準文献に従うが、本文で必要なのは「X 方向のサイクルを入れると、残った $\mathcal{B}^*_P$ 方向のコホモロジー類が出る」という型である。

$\mu(\alpha_j)$ を表す幾何学的代表 $V_{\alpha_j} \subset \mathcal{B}^*$ を一般位置に選び、次数の和をモジュライ空間の次元に合わせる。切り下げた集合

$$\mathcal{M}_k \cap V_{\alpha_1} \cap \cdots \cap V_{\alpha_m}$$

が有限個の正則点からなり、その閉包が Uhlenbeck コンパクト化の低い層へ当たらないことを次元評価で確認したとき、その符号付き点数を Donaldson 不変量と定義する。特異なコンパクト化全体に通常の多様体の基本類があると仮定しているのではない。文献で使う

$$D_X(z) = \langle \mu(z), [\overline{\mathcal{M}}_k] \rangle$$

という表示は、この幾何学的切り下げと境界回避が正当化された場合の略記である。

有限次元の切り下げを計算する

$M = \mathbb{R}^2$ を 2 次元モジュライ空間の模型とし、二つの次数 1 条件を

$$V_1 = \{(x, y) : y = 0\}, \qquad V_2 = \{(x, y) : y = x + 1\}$$

とする。連立方程式を解くと交点は $(-1, 0)$ の一つである。接ベクトル $(1, 0)$ と $(1, 1)$ の行列式は 1 なので、交点符号は $+1$ である。

V_2 を平行移動して $y = x + c$ としても、交点は $(-c, 0)$ へ動くだけで符号は変わらない。ただし交点が無限遠へ逃げる空間や、二つの条件が接する非横断な配置では、この議論は壊れる。ゲージ理論では、コンパクト化が「無限遠へ逃げない」を、横断性が「接しない」を保証する。

この模型で、2 次元空間に次数 1 の条件を二つ課すと 0 次元になる。Donaldson 理論では、$\mu(\Sigma)$ は $\Sigma \in H_2(X)$ に対して次数 2、$\mu(\mathrm{pt})$ は点類に対して次数 4 を持つので、条件の次数和をモジュライ空間の実次元へ一致させる。

μ 写像は何を測るか

μ 写像は、X 内のサイクルを「そのサイクル上で接続が満たす条件」としてモジュライ上のコホモロジー類へ移す装置である。定義には普遍束の Pontryagin 類、または Chern 類を使う。形式的には

$$\mu(\alpha) = -\frac{1}{4} p_1(\mathbb{P}) / \alpha$$

のように、普遍束の特性類を $\alpha \in H_i(X)$ に対してスラント積する。ここで $\mathbb{P}$ は $X \times \mathcal{B}^*$ 上の普遍 $SO(3)$ 束である。

係数についても注意が必要である。$-\frac{1}{4} p_1(\mathbb{P})$ がどの係数環で整った類になるかは、$SO(3)$ 束か $SU(2)$ 束か、普遍束をどの商で作るか、$w_2(P)$ をどう固定するかに依存する。多くの入門的な式では有理係数で書き、整数性が必要な場合は束の型と係数環を明示する。本書ではまず次数と切り下げの型を使い、整数係数の完全な扱いは引用定理の仮定に含める。

スラント積の型を一度だけ確認する。$X \times \mathcal{B}^*$ 上の 4 次コホモロジー類 $p_1(\mathbb{P})$ を、X 側の i 次元サイクル α で評価すると、残りは $\mathcal{B}^*$ 側の次数 $4 - i$ のコホモロジー類になる。記号では

$$p_1(\mathbb{P}) / \alpha \in H^{4-i}(\mathcal{B}^*)$$

である。したがって点類 $\mathrm{pt} \in H_0(X)$ を入れると 4 次類、曲面類 $\Sigma \in H_2(X)$ を入れると 2 次類が出る。この次数が、切り下げ条件の個数を決める。

積の例で見ると、型はもっと単純である。仮に $X = S^2$、$\mathcal{B}^* = S^2$ とし、$u \in H^2(S^2_X)$、$v \in H^2(S^2_{\mathcal{B}})$ をそれぞれ基本類に 1 を返す生成元とする。$X \times \mathcal{B}^*$ 上の類 $u \otimes v$ を $[S^2_X]$ でスラント積すると

$$(u \otimes v) / [S^2_X] = \langle u, [S^2_X] \rangle v = v$$

となり、X 側の次数 2 が消えて $\mathcal{B}^*$ 側の 2 次類が残る。点類で割る場合は X 側の次数 0 成分だけを拾う。Donaldson 理論の $\mu(\Sigma)$ と $\mu(\mathrm{pt})$ は、この積分方向の違いを普遍束の特性類に対して行っている。

直感的には、点類 $\mathrm{pt} \in H_0(X)$ からは次数 4 の条件、曲面類 $\Sigma \in H_2(X)$ からは次数 2 の条件が出る。モジュライの次元と挿入次数が一致したときだけ、有限個の交点を数える形になる。

最初は、μ類を「モジュライ空間を測るための測定器」と考えてよい。どの測定器を何個入れるかは、まず次数合わせで決まり、その後に横断性と向きの議論で符号付き数へ変わる。

この説明で重要なのは、Donaldson 不変量が「ASD 接続の個数」だけではないことである。正次元モジュライでは、幾何的条件を何個か課して 0 次元へ切り下げ、その符号付き交点数を取っている。

Donaldson 不変量の構成を最後まで追う

ここまでの説明は一般形だったので、定義がまだ宙に浮いて見える。そこで、典型的な状況を一つ固定して、不変量が本当に数になるまでを追う。ここで行うのは公刊文献中の特定多様体に対する Donaldson 多項式の数値再計算ではなく、構成の全手順を追うための模型である。実在する Donaldson 側の具体的出力は、次章の E_8 排除で、入力、引用定理、格子計算、幾何的結論までを閉じる。

閉・向き付き・単連結な滑らかな 4 多様体 X を取り、$b_2^+(X) > 1$ とする。$SO(3)$ 束 $P \to X$ を固定し、$w = w_2(P)$ と $p_1(\mathrm{ad}\ P)$ により位相型を固定する。既約 ASD 接続のモジュライを $\mathcal{M}_P$ と書き、一般的な計量により正則で実次元 $2r$ になっていると仮定する。

このとき Donaldson 不変量の一つの値は、ホモロジー類

$$\alpha_1, \dots, \alpha_m \in H_0(X) \oplus H_2(X)$$

を選び、

$$\sum_{j=1}^{m} \deg \mu(\alpha_j) = 2r$$

が成り立つ場合に

$$D_X^w(\alpha_1 \cdots \alpha_m) = \left\langle \mu(\alpha_1) \cdots \mu(\alpha_m), [\overline{\mathcal{M}}_P] \right\rangle$$

として定義される。ここで $\overline{\mathcal{M}}_P$ は Uhlenbeck コンパクト化であり、ペアリングが境界層に邪魔されない次数範囲を選ぶ。$\mathbb{P}$ は $X \times \mathcal{B}_P^*$ 上の普遍 $SO(3)$ 束で、$\mathcal{B}_P^*$ は既約接続をゲージで割った空間である。全ゲージ群で割ると中心や普遍束の定義に細工が要るため、文献では基点付きゲージ群を通して作ってから必要な商へ降ろす、または普遍随伴束を使う、という処理を行う。本書ではこの構成上の細部を丸ごと引用定理へ送らず、値の定義に必要な入力として明示しておく。

幾何的には、$\mu(\alpha_j)$ を代表するサイクルを $\mathcal{B}_P^*$ 上に選び、それらを $\mathcal{M}_P$ と横断に交わらせる。交わり

$$\mathcal{M}_P \cap V_{\alpha_1} \cap \cdots \cap V_{\alpha_m}$$

が 0 次元になれば、その点を向きで符号付きに数える。これが上のコホモロジー・ペアリングである。

例えば $\dim \mathcal{M}_P = 4$ なら、許される次数合わせには次の二通りがある。

$$\mu(\mathrm{pt}) \qquad \text{または} \qquad \mu(\Sigma_1)\,\mu(\Sigma_2).$$

前者は次数 4 の条件を一つ、後者は次数 2 の条件を二つ課す。どちらも切り下げ後の期待次元は 0 である。対して、曲面条件を一つだけ課すと期待次元は 2 のままで、まだ点を数えられない。次数合わせは形式的な規則ではなく、「何個の連立条件で自由度を使い切るか」という次元計算である。

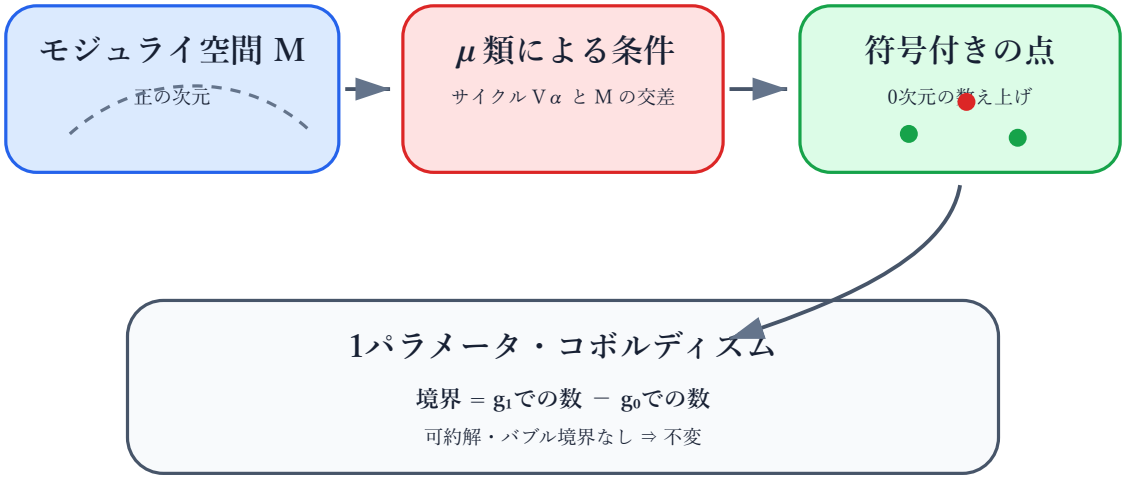


図 11: Donaldson 不変量では、正次元モジュライに μ 類の条件を課して 0 次元へ切り下げ、1 パラメータ・コボルディズムで符号付き数が変わらないことを示す。

補助計量を g_0 から g_1 へ動かしたときは、同じ挿入サイクルをパラメータ付きモジュライへ引き上げる。正則なら切り下げ後の空間は 1 次元向き付き多様体になり、その境界は

$$\left(\mathcal{M}_{P,g_1} \cap V_{\alpha_1} \cap \cdots \cap V_{\alpha_m}\right) \sqcup -\left(\mathcal{M}_{P,g_0} \cap V_{\alpha_1} \cap \cdots \cap V_{\alpha_m}\right)$$

に、もしあればバブリング境界や可約境界を加えたものになる。$b_2^+ > 1$ は 1 パラメータ経路で可約の壁を避けるための標準仮定であり、次元条件はバブリング層が切り下げ後の 1 次元コボルディズムへ余分な端として入らないように選ぶ。余分な境界がなければ、向き付き境界の総数が 0 であることから、D_X^w は計量に依存しない。

この段階で、PDE の解空間が滑らかな不変量へ変わる理由を一文で言える。方程式と商は滑らかな構造に依存して定義されるが、正則性、向き、コンパクト化、コボルディズムにより、補助計量や代表サイクルを変えても同じ数を返すからである。したがって微分同相写像はこの構成全体を対応させるが、単なる同相写像には同じ対応を期待できない。

一つの不変量を作る九段階

ここまでの機械は、方程式、対称性、線形化、複体、指数、正則性、向き、コンパクト化、数え上げの順で動く。どれか一段を省くと「有限次元か」「滑らかか」「符号を付けられるか」「逃げないか」のいずれかが未解決になる。

各段の入出力を明示すると次のようになる。

段階	入力	出力
方程式	接続 A	ASD 解集合
対称性	ゲージ群の作用	同じ幾何の同定
線形化	解 A	d_A, d_A^+
複体	$d_A^+ d_A = 0$	H_A^0, H_A^1, H_A^2
指数	主記号	期待次元
正則性	摂動・計量	滑らかなモジュライ空間

段階	入力	出力
向き	行列式線	符号
コンパクト化	解列	理想インスタントンを含む極限
数え上げ	μ 類とコボルディズム	補助データに依存しない数

実例へ渡すもの

この九段階は抽象的な点検表だけではない。第 14 章の K3 結び目手術 では、同じ K3 の位相型の上に作った X_K に対して Seiberg–Witten 級数

$$\mathcal{SW}_{X_K} = \mathcal{SW}_{K3}\Delta_K(t)$$

を比較する [6]。右辺の係数を微分同相不変量として使えるのは、まさに正則性、向き、コンパクト性、コボルディズムという本章の工程が背後にあるからである。公式そのものの証明には トーラス手術に対する貼り合わせ がさらに必要であり、本書では第 14 章で定理として入力する。

失敗モードの対応表

最後に、この Part で出てきた失敗を一覧にしておく。これは後の Donaldson 定理と SW 理論を読むための点検表でもある。

失敗	数学的な場所	対応する道具
同じ接続を何度も数える	ゲージ軌道	商、スライス
商が特異になる	安定化群、H^0_A	既約条件、特異層管理
一次解が本物の解にならない	障害、H^2_A	Kuranishi 模型、摂動
期待次元が実次元でない	正則性の失敗	Sard–Smale、一般的な計量
点数の符号が決まらない	行列式線束	ホモロジー向き
解列が逃げる	バブリング	Uhlenbeck コンパクト化
計量を変えると値が変わる	余分な境界	コボルディズム、$b_2^+ > 1$、壁越え

次章ではこの共通機械から得られる Donaldson の二つの出力を分離する。対角化定理は定値交点形式への制約であり、Donaldson 多項式はより精密な滑らかな不変量である。同じ解析基盤を使うが、同じ主張ではない。

> **i** 節内演習：0 次元解の符号付き数え上げ
>
> $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$、$f(x)=x^3-x$ の零点を、標準の向きから定まる符号付きで数えよ。
>
> **解答。** 零点は
>
> $$f(x)=x(x-1)(x+1)=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1,0,1$$
>
> である。$f'(x)=3x^2-1$ だから各点の符号は
>
> $$\operatorname{sign} f'(-1)=+1,\quad \operatorname{sign} f'(0)=-1,\quad \operatorname{sign} f'(1)=+1.$$
>
> よって符号付き個数は $1-1+1=1$ である。絶対値だけを足した 3 ではなく、向きが変形で保存される数を作る。

第 13 章　Donaldson の二つの出力

出力 A：定値形式への制約

Donaldson 対角化定理は、X を閉・連結・向き付き・滑らか・単連結な 4 次元多様体とし、交点形式 Q_X が正定値なら、Q_X は整数上で $\langle 1, \dots, 1 \rangle$ と同値である、と述べる。負定値の場合は向きを反転して $\langle -1, \dots, -1 \rangle$ を得る。証明では低チャージの ASD モジュライ空間をコンパクト化し、その端の構造を解析して格子へ矛盾を返す。結論は「多項式の値」ではなく、滑らかな多様体が持ちうる交点形式への制約である。[3]

入力を整理すると、滑らかさは ASD 解析を可能にし、単連結性は可約と束の分類を単純化し、定値性はモジュライの次元と端を制御する。結論だけを Freedman 分類と並べれば短いが、背後には第 7–11 章の全機械がある。

ここで読者が止まりやすいのは、「解析的なモジュライ空間の端が、なぜ整数格子の対角化を強制するのか」という点である。証明を完全に再現するには長い準備が必要だが、論理の骨格は次のように分解できる。

1. 交点形式 Q_X から、ある $SO(3)$ または $SU(2)$ 束 P を選ぶ。
2. その束上の ASD モジュライ空間 $\mathcal{M}(P)$ を作る。
3. 指数公式により、期待次元が低い場合を選ぶ。
4. Uhlenbeck コンパクト化で、非コンパクトな逃走を「有限個の点で位相数が落ちる」という境界として管理する。
5. 境界やリンクの組合せが、$H^2(X;\mathbb{Z})$ の格子構造と矛盾する。

つまり、モジュライ空間が直接「交点形式そのもの」なのではない。交点形式は束の特性類と次元公式に入り、コンパクト化の端の個数・リンク・向きの整合性を通じて制約として戻ってくる。この戻り方が Donaldson 理論の非自明な点である。

もっと粗い比喩で言えば、Freedman 理論は「この格子を交点形式として持つ位相的 4 多様体はあるか」を問う。一方 Donaldson 対角化定理は、「それが滑らかな多様体なら、そこから作った ASD モジュライの端が矛盾なく閉じるか」を問う。E_8 のような定値で非対角な格子は前者では許されるが、後者では許されない。

> **i 証明の骨格：Donaldson 対角化定理**
>
> 本書では Donaldson 対角化定理の解析的貼り合わせを完全証明しない。使用する深い入力は、ASD モジュライの正則性、向き、Uhlenbeck コンパクト性、低チャージモジュライの端の解析である。ただし、束の選択、可約解から長さ -1 の格子ベクトルが出る計算、リンクが $\mathbb{CP}^2$ になる次元計算、最後の格子補題は本文内で追う。以下の経路は Donaldson の原論文と標準教科書に基づく骨格であり、Perutz の講義ノートにも同じ流れで要約されている。[3], [4], [7]

初読では、右列の結論を先に押さえ、中央列は「ここは深い解析として引用する部分」として読めばよい。

読者が本文で追うこと	深い定理として引用すること	得られる結論
$c_2 = 1$ の束から 5 次元 ASD モジュライを見る理由	一般計量での正則性と向き付け	境界を符号付きに比較できる
可約接続のリンクが $\mathbb{CP}^2$ 型になる次元計算	可約近傍の局所模型と貼り合わせ解析	可約端が交点格子の長さ -1 ベクトルを返す
バブリング端と可約端の個数を格子量へ翻訳する部分	Uhlenbeck コンパクト性と端の向きの整合	$r \le N$ という不等式が出る
格子補題 $N \le r$ と両不等式の結合	なし。本文内の有限次元計算	$Q_X \cong -I_r$、正定値なら向きを反転して I_r

対角化定理の証明骨格をもう一段具体化する

対角化定理の証明で読者が見失いやすいのは、「どの束を見ているのか」である。文献には、負定値の場合に $SO(3)$ 束 P を選び、$w_2(P)$ が交点格子の特定の特性ベクトルを表すようにする説明も多い。すると $p_1(\mathrm{ad}\ P)$ と Q_X が ASD モジュライの期待次元に入る。これは同じ対角化定理へ向かう別ルートの言葉であり、本章で実際に数式を追う主線ではない。

本章の主線は、このあと固定する $SU(2)$ 束 E、すなわち

$$c_1(E) = 0, \qquad c_2(E)[X] = 1$$

から出発する 5 次元モジュライの経路である。SO(3)・特性ベクトルの記述は、標準文献で同じ定理がどのように語られるかを理解するための補足として読む。束を選ぶ目的はどちらの経路でも同じで、単に解を作ることではなく、期待次元と可約の形を格子から読める状況に置くことである。

次に、一般的な計量で既約部分を正則にし、低次元のモジュライを得る。典型的には、1 次元または少し高い次元のモジュライをコンパクト化し、その端を見る。Uhlenbeck コンパクト化により、非コンパクト性は位相数の減少として記録される。一方、可約接続が現れると、その近傍のリンクは複素射影空間に似た構造を持ち、向き付き境界やコホモロジー・ペアリングに具体的な寄与を返す。

ここで格子論が入る。可約は、接続が線束の和に分裂することに対応し、その第一 Chern 類が $H^2(X;\mathbb{Z})$ のベクトルを与える。分裂の条件、期待次元、リンクのコホモロジーが組み合わさると、「各格子ベクトルに対して特定のペアリングが成り立たなければならない」という条件が出る。負定値で滑らかな場合、この条件を満たす格子は標準対角格子でなければならない、というのが対角化定理の格子論的帰結である。

本書で完全証明しない研究級入力は二つある。第一に、可約近傍の局所模型を正確に作り、コンパクト化の端とリンクの向き・コホモロジーを整合させる解析である。第二に、5 次元モジュライの境界から署名の不等式 $r \le N$ を得る部分である。一方、そこから先の有限次元格子計算、すなわち $N \le r$ と $Q_X \cong -I_r$ は本章で追う。したがって以下では「引用する解析」と「本文で計算する格子論」を分けて読む。

したがって、対角化定理は単に「ASD モジュライを使う」と言うだけでは足りない。証明の骨格は

```
定値交点格子
→ 特性類を持つ補助束（本章の主線では SU(2), c2=1）
→ 低次元 ASD モジュライ
→ Uhlenbeck 端と可約リンク
→ リンクのコホモロジー と向きの関係
→ 特性ベクトルに関する格子条件
→ 整数上の対角化
```

である。この経路を知っておくと、Freedman の存在定理と Donaldson の非存在定理がどこで衝突するかを、単なる有名定理の比較ではなく、解析から格子へ戻る論理として読める。

低次元モジュライは何を数えるのか

第 12 章では、0 次元 モジュライなら点を符号付きで数え、正次元 モジュライならコホモロジー類を挿入して数を得る、と説明した。対角化定理の証明で現れる低次元モジュライは、この一般機械の極端な使い方である。

例えば 1 次元のコンパクトな向き付き多様体なら、境界点の符号付き和は 0 でなければならない。ところが ASD モジュライをコンパクト化すると、境界に見える点は単なる任意の点ではなく、位相数の減少、可約、格子の特定のベクトルに対応する。そこで「境界の符号付き和は 0」という解析・位相的事実が、「格子に特定の形のベクトルが存在しなければならない」という整数論的条件へ翻訳される。

この説明だけでは証明には足りない。だが、少なくとも「モジュライ空間の端を見る」という操作がなぜ交点形式に関係するのかは分かる。端はコンパクト性の失敗の記録であり、その失敗は束の特性類、従って $H^2(X;\mathbb{Z})$ の格子に記録されるからである。

可約リンクを小さな模型で見る

ここで、一般定理の代用品ではなく、リンクがコホモロジーを返す仕組みだけを有限次元で見る。$\mathbb{C}^2$ に S^1 が

$$e^{i\theta}\cdot(z_1,z_2)=(e^{i\theta}z_1,e^{i\theta}z_2)$$

で作用すると、原点以外の半径 ε の球面 S^3_ε の商は

$$S^3_\varepsilon/S^1=\mathbb{CP}^1$$

である。$\mathbb{CP}^1$ には 2 次の生成元 $h\in H^2(\mathbb{CP}^1;\mathbb{Z})$ があり、

$$\int_{\mathbb{CP}^1}h=1$$

で正規化できる。したがって「孤立した特異点の近くを小球でくり抜き、その境界商にコホモロジー類を積分する」と、整数が一つ返る。

ASD モジュライで可約接続が現れると、局所模型はこの例より高次元で、しかも複素線束の和への分裂を伴う。典型的には随伴束の分裂から、ある線束の第一 Chern 類

$$c_1(L)\in H^2(X;\mathbb{Z})$$

が現れ、これは交点格子のベクトルとして読める。リンクの射影空間型コホモロジーに、普遍束から来る類を制限して積分すると、その値は $c_1(L)$ と交点形式のペアリングで書かれる。この「積分値が格子ベクトルの数値になる」という一点が、解析から整数格子へ戻る橋である。

ただし、本書はここで Donaldson 対角化定理を証明し切っているわけではない。一般の場合に引用する研究級入力は、次の二点である。

1. 可約接続の近傍を、安定化群を含めて正確な局所模型にすること。
2. Uhlenbeck 端、可約リンク、向きの符号を一つのコンパクト化境界として整合させ、署名比較から $r\le N$ を得ること。

本章で手計算した $\mathbb{CP}^1$ の模型は 1 の局所的な影だけを示す。次の節では、Perutz の講義ノートにも現れる 5 次元経路に沿って、$c_2=1$、可約リンク $\mathbb{CP}^2$、署名不等式、格子計算の主線を本文内で追う。模型を定理の完全証明と取り違えないことが重要である。

実際の 5 次元経路：$c_2=1$ から $\mathbb{CP}^2$ リンクへ

ここで、対角化定理の中心だけは数式で追う。X を閉・連結・向き付き・滑らか・単連結で、交点形式が負定値である 4 多様体とする。階数を

$$r=b_2(X)=-\sigma(X)$$

と書く。正定値の場合は向きを反転すればよい。

まず $SU(2)$ 束 $P\to X$ と付随する階数 2 複素ベクトル束 E を取り、

$$c_1(E)=0,\qquad c_2(E)[X]=1$$

となるように選ぶ。この一文には三つの主張が混ざりやすい。

1. その位相型の束が存在する。
2. その束上に ASD 解が存在する。
3. 解のモジュライ空間が、必要な正則性と端の構造を持つ。

ここで束の存在だけは、4 次元の位相的な束分類で説明できる。最小模型は S^4 である。北半球と南半球では束を自明化し、赤道 S^3 上で二つの自明化を貼り合わせる。構造群が $SU(2)$ の場合、行列

$$\begin{pmatrix} a & b\\ -\bar b & \bar a\end{pmatrix},\qquad |a|^2+|b|^2=1,$$

で $SU(2) \cong S^3$ と見られるので、貼り合わせ写像は

$$g : S^3 \to SU(2) \cong S^3$$

である。この写像の次数が、直観的には束の「ねじれ数」であり、S^4 上では第 2Chern 数を与える。正確な符号は、S^4 の向き、赤道の境界向き、$SU(2) \cong S^3$ の同一視の規約に依存する。本書ではこれらを固定し、次数 1 の写像から $c_2 = 1$ の基本例を得るという規約で読む。

一般の閉・連結・向き付き 4 多様体でも、4 次元 CW 複体上の $SU(2)$ 束は、第 2Chern 類

$$c_2(E) \in H^4(X; \mathbb{Z})$$

で分類される、という標準定理を使う。ここでは分類定理そのものは引用する。X が閉・連結・向き付きなら、向きの基本類 $[X]$ により $H^4(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ と読めるので、評価

$$\langle c_2(E), [X] \rangle = 1$$

となる $SU(2)$ 束を選べる。単連結性は後で可約やゲージ群を扱うときに効くが、この段階で言っているのは、まず補助束の位相型を選べるということである。

ただし、$c_2(E)[X] = 1$ の束が存在することは、その束上に ASD 接続があることを意味しない。さらに、解空間が期待通りの 5 次元多様体になり、Uhlenbeck 端と可約リンクを持つことも、束分類からは出ない。そこは Donaldson 理論の研究級解析として引用する。

> **i 確認：束の存在と解の存在は違う**
>
> 「$c_2 = 1$ の束があるから ASD 解もある」と言ってはいけない。束の存在は、貼り合わせ写像や $c_2 \in H^4(X; \mathbb{Z})$ による位相的分類の主張である。ASD 解の存在は、その束上の接続が非線形偏微分方程式 $F_A^+ = 0$ を満たすかという解析的主張であり、一般の計量・摂動・コンパクト化の議論を別に必要とする。

この束上の ASD 接続のモジュライを考える。指数公式は、ここでは

$$d = 8c_2(E)[X] - 3(1 - b_1 + b_2^+)$$

であり、X は単連結だから $b_1 = 0$、負定値だから $b_2^+ = 0$ である。従って

$$d = 8 \cdot 1 - 3(1 - 0 + 0) = 5.$$

なぜ 5 次元を選ぶのか。Uhlenbeck 端では、1 単位のエネルギーが一点へ集中し、その中心点が X の 4 次元パラメータになる。一方、可約点のリンクも 4 次元の $\mathbb{CP}^2$ になる。5 次元モジュライを切って端を見ると、4 次元の境界成分を比較できるからである。

次に可約接続を格子ベクトルへ変換する。可約とは、E が線束の和

$$E \cong L \oplus L^{-1}$$

へ分裂し、接続もこの分裂を保つ状況である。Whitney 積公式から

$$c(E) = c(L)c(L^{-1}) = (1 + c_1(L))(1 - c_1(L)) = 1 - c_1(L)^2.$$

したがって

$$c_2(E) = -c_1(L)^2.$$

$c_2(E)[X] = 1$ なので

$$Q_X(c_1(L), c_1(L)) = \langle c_1(L)^2, [X] \rangle = -1.$$

つまり、可約点は交点格子の長さ -1 のベクトルを要求する。L と L^{-1} を入れ替えると $c_1(L)$ は符号反転するので、候補は符号を同一視した対

$$\{\pm c : c \in H^2(X;\mathbb{Z}),\, c^2 = -1\}$$

で数える。この個数を N と書く。

可約点近傍の有限次元模型も、先ほどの $\mathbb{C}^2/S^1$ では足りない。5 次元 ASD モジュライでは、可約点の横方向の複素次元が 3 になり、局所模型は

$$\mathbb{C}^3/S^1$$

に似た錐になる。半径を固定したリンクは

$$S^5/S^1 = \mathbb{CP}^2$$

である。$\mathbb{CP}^2$ の超平面類 $h \in H^2(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z})$ は

$$\langle h^2, [\mathbb{CP}^2] \rangle = 1$$

で正規化される。練習用の $\mathbb{CP}^1$ では h を一回積分して数を得たが、本論の $\mathbb{CP}^2$ では h^2 を 4 次元基本類で評価する。この次数の違いが、リンクの次元を見失わないための目印である。

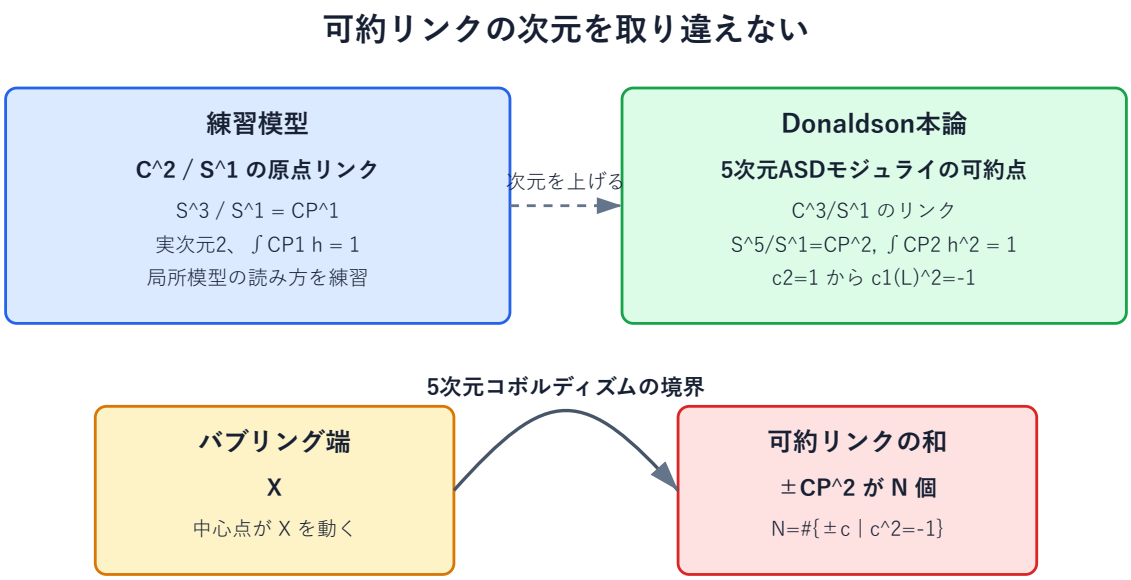


図 12: 練習用の $S^{3/S}1$=CP^1 と、実際の 5 次元 ASD モジュライで現れる $S^{5/S}1$=CP^2 リンクを比較し、バブリング端 X と可約リンクの署名関係を示す。

ここまでが本文で追える有限次元部分である。研究級の入力は次の一文に集約される。一般的な計量を選び、可約点の小近傍を取り除き、Uhlenbeck 端を付けると、5 次元の向き付きコンパクトなコボルディズム W が得られ、その境界は X と、N 個の $\mathbb{CP}^2$ に向きを付けたものの直和になる。ここでは正則性、可約近傍の解析、貼り合わせ、向きの整合性を Donaldson 理論の定理として引用する。

向きの符号は、1 次元の区間で先に見ると分かりやすい。向き付き区間 $[0,1]$ の境界は、終点が正、始点が負なので

$$\partial[0,1] = \{1\} - \{0\}$$

と書く。同じように、5 次元の向き付き境界は 4 次元閉多様体の符号付き和である。ここでは向き規約を

$$\partial W = X \sqcup \coprod_{j=1}^{N} (-\varepsilon_j \mathbb{CP}^2), \qquad \varepsilon_j = \pm 1$$

と取る。$-\mathbb{CP}^2$ は $\mathbb{CP}^2$ の向きを反転したものを表す。

署名について使う性質は三つである。第一に $\sigma(\mathbb{CP}^2)=1$、向きを反転すると $\sigma(-\mathbb{CP}^2)=-1$。第二に、非交和では署名が加法的である。第三に、向き付き境界全体の署名は 0 である。最後の性質は本書で証明するのではなく、Hirzebruch 署名定理やコボルディズム不変性に属する標準定理として引用する。

したがって

$$0=\sigma(\partial W)=\sigma(X)-\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j$$

であり、すなわち

$$\sigma(X)=\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j.$$

負定値なので $\sigma(X)=-r$ であり、絶対値を取ると

$$r=|\sigma(X)|\le N$$

を得る。解析から得た結論は、「長さ -1 の符号対が少なくとも r 個必要」という整数不等式である。

ここで「少なくとも」という向きに注意する。可約点が N 個あると、解析から $|\sum\varepsilon_j|=r$ が出る。符号付き和の絶対値は項数を超えられないので、$r\le N$ である。つまり解析は、階数 r の負定値格子に、長さ -1 の符号対が少なくとも r 個なければならない、と要求する。

最後は初等的な格子論である。負定値格子で $c^2=d^2=-1$ とする。正定値形式 $-Q$ に Cauchy–Schwarz を使うと

$$|Q(c,d)|\le 1.$$

もし $|Q(c,d)|=1$ なら等号成立なので、c と d は実数倍である。どちらも整数格子の長さ -1 だから、$d=\pm c$ である。従って、符号対として異なる長さ -1 ベクトルは互いに直交する。互いに直交する非零ベクトルは一次独立なので、符号対の個数は階数を超えられず

$$N\le r$$

である。解析からの $r\le N$ と合わせて $N=r$ となる。さらに r 本の互いに直交する長さ -1 のベクトルを基底に取ると、その張る部分格子の行列式は 1 である。元の交点格子も単連結閉 4 多様体のポアンカレ双対性によりユニモジュラーだから、指数の二乗が行列式比になることから指数は 1 で、これらは全格子の整数基底をなす。従って

$$Q_X\cong -I_r.$$

これで Donaldson 対角化の有限次元の主線は閉じる。

出力 B：多項式不変量

一方、Donaldson 多項式不変量は正次元モジュライ空間へ μ 類を挿入して得る。概略的には

$$D_X^{w}:\mathrm{Sym}^{*}(H_0(X)\oplus H_2(X))\to\mathbb{Z}$$

であり、束の特性類 w、ホモロジー向き、次元合同条件などを固定して定義される。$b_2^+>1$ では一般的な補助データに依存しない微分同相不変量になる。[4], [8]

多項式不変量は交点形式だけからは決まらない。従って同相な多様体を区別できる可能性がある。例えば複素曲面や楕円曲面では、代数幾何的構造と結びついた非自明な値が滑らかな構造の情報を保持する。

ここで μ-類は、ホモロジー類をモジュライ空間上のコホモロジー類へ移す装置である。直感的には、X の中の点・曲面・サイクルが、ASD 接続の族に対してどう見えるかを測る。モジュライ空間の次元が $2d$ なら、合計次数が $2d$ になるように $\mu(\alpha_1),\dots,\mu(\alpha_r)$ を掛けて基本類とペアリングする。

記号的には

$$\langle \mu(\alpha_1)\cdots\mu(\alpha_r), [\mathcal{M}] \rangle$$

と書くが、これは Uhlenbeck コンパクト化全体が滑らかな基本類を持つという意味ではない。実際の定義では μ 類の幾何学的代表を正則な主層と横断に交わらせ、切り下げた 0 次元集合の閉包が低いバブリング層や可約解へ当たらないことを次元評価で保証して符号付きに数える。向きがなければ符号は定義できず、次数が合わなければ有限個の点にならない。この注意を外すと、特異なコンパクト化に形式的な基本類を置く誤りになる。

Donaldson 側の具体経路：E_8 形式を排除する

E_8 格子は階数 8、正定値、偶、ユニモジュラーである。Freedman の存在定理は、この交点形式を持つ閉・単連結な位相的 4 次元多様体 X_{E_8} を与える。ここで X_{E_8} が滑らかな構造を持つと仮定すると、Donaldson 対角化定理の全仮定が満たされるため

$$E_8 \cong \langle 1, \ldots, 1 \rangle$$

でなければならない。しかし左辺は偶形式、右辺は自己交点 1 の基底ベクトルを持つ奇形式であり、整数格子として同型ではない。従って X_{E_8} は平滑化できない。この例の論理は

```
E8 格子 → Freedman による位相的実現
→ 滑らかと仮定 → ASD モジュライに基づく Donaldson 対角化
→ 偶奇の矛盾 → 非平滑化可能
```

で閉じる。ASD モジュライ空間の内部計算をやり直してはいないが、入力、引用定理、格子計算、幾何的結論が一つの実例で最後までつながる。これは異種滑らかな構造の組の構成ではなく、滑らかな構造が一つも存在しないという結論である。

上で追った負定値版を直接使うなら、向きを反転して $-E_8$ を見る。$-E_8$ は負定値、偶、ユニモジュラーで階数 $r = 8$ である。偶格子なので $c^2 = -1$ を満たす整数ベクトルは存在せず、$N = 0$ である。しかし 5 次元 ASD モジュライの境界計算は $r \leq N$、すなわち $8 \leq 0$ を要求する。これが有限次元の主線から見た矛盾である。正定値の E_8 と負定値の $-E_8$ は向き反転で行き来するだけなので、同じ平滑化不能性を表している。

小さな模型で言えば、2 次元の向き付き曲面 M と 2 次コホモロジー類 η があるとき、$\langle \eta, [M] \rangle$ は数である。しかし 1 次類を一つだけ挿入しても次数が合わず、3 次類はそもそも存在しない。Donaldson 多項式で次数合わせをうるさく言う理由はこれと同じで、モジュライの期待次元と挿入の次数が合って初めて「数える」操作になる。

μ-類挿入の小さな模型

実際の Donaldson 多項式を一つ完全計算するには、モジュライ空間の向き、コンパクト化、貼り合わせまで必要になる。ここでは計算の代わりに、数え上げの型だけを有限次元模型で確認する。

仮に正則なモジュライ空間 $\mathcal{M}$ が向き付き 4 次元多様体で、ホモロジー類 $\Sigma \in H_2(X)$ から 2 次類 $\mu(\Sigma) \in H^2(\mathcal{M})$ が得られているとする。このとき

$$\langle \mu(\Sigma)^2, [\mathcal{M}] \rangle$$

は数である。$\mu(\Sigma)$ を一回だけ挿入すると次数 2 で足りず、三回挿入すると次数 6 で大きすぎる。したがって、Donaldson 多項式は「好きな類を入れて値を見る」操作ではなく、モジュライの次元と挿入次数が一致する場合だけ数を返す。

この模型は実不変量の計算ではない。しかし、読者が押さえるべき構造はここにある。X のホモロジー類は μ写像でモジュライ空間上のコホモロジー類へ移され、モジュライ空間の基本類とペアリングされる。このペアリングが微分同相不変量になるには、前章までの正則性、向き、コンパクト性、計量独立性の全てが必要になる。

具体例を読むときの注意

文献中の Donaldson 多項式計算では、楕円曲面や代数曲面のように追加の幾何を持つ例が多い。追加構造によりモジュライ空間が代数幾何的対象と対応し、計算が可能になるからである。これは「Donaldson 不変量は代数曲面でしか定義できない」という意味ではない。定義は滑らかな 4 多様体に対して行うが、実際に値を求めるには計算を助ける幾何が必要になることが多い、という意味である。

また、Donaldson 多項式が異なると分かっても、それだけで「二つの多様体が同相」とは言えない。多項式は滑らかな側の識別器であり、位相的同一性は Freedman 分類や具体的構成で別に確認する。この分担を崩すと、次章の異種滑らかな構造の組の論理が曖昧になる。

同じ機械、異なる論理

両者の共通部分は ASD 方程式、ゲージ商、変形複体、Uhlenbeck コンパクト化である。相違は、どの次元のモジュライをどう使い、何を結論するかにある。

観点	対角化定理	Donaldson 多項式
主な入力	定値交点形式	ホモロジー類への挿入
モジュライの利用	端・境界構造	コホモロジー・ペアリング
出力	交点形式の整数対角化	数・多項式
主な用途	平滑化可能性の障害	滑らかな構造の識別

この区別により、「Donaldson 理論が交点形式を分類する」という曖昧な説明を避けられる。対角化定理は強い必要条件を与えるが、全滑らかな 4 多様体を分類しない。多項式も完全不変量ではない。

もう一つの混同も避けたい。対角化定理は、ある位相的 4 多様体が平滑化できないことを示すのに使える。一方、多項式不変量は、すでに滑らかな構造を持つ二つの多様体を比較し、その滑らかな構造が同じではないことを示すのに使うことが多い。

したがって、同じ「Donaldson 理論」でも、証明の文は次の二種類に分かれる。

```
Freedman では存在する
しかし Donaldson 対角化に反する
したがって滑らかな構造は存在しない
```

と

```
Freedman または構成により同相
しかし Donaldson 不変量が異なる
したがって微分同相ではない
```

である。前者は平滑化可能性の障害、後者は異種滑らかな構造の検出である。第 14 章でこの二つを照合する。

実在する異種滑らかな構造の組への橋

ここまでの E_8 の経路は「位相的には存在するが滑らかにはできない」例を与える。これとは別に「両方とも滑らかだが互いに微分同相でない」例を得るには、同相性を先に保証したうえで滑らかな不変量を比較しなければならない。第 14 章では Fintushel–Stern の K3 結び目手術 を用い、自明結び目 と 三葉結び目 から得る二つの多様体がともに K3 と同相である一方、Seiberg–Witten 基本類の個数が異なることを最後まで追う [6]。これは Donaldson 対角化定理とは別の具体経路である。

計算できる不変量と計算できない不変量

Donaldson 多項式は定義できれば強力だが、実際の計算は重い。ASD 方程式は非可換で、モジュライ空間のコンパクト化、向き、貼り合わせ、壁越えを同時に扱う必要がある。特に$b_2^+ = 1$では部屋依存があり、$b_2^+ > 1$の場合より不変量性の主張が繊細になる。

この困難は欠点だけではない。Donaldson 理論が重いからこそ、滑らかな構造に対して非常に敏感な情報を持つ。しかし、教材の流れとしてはここで限界も見える。読者が次に自然に問うのは、「同じ滑らかな情報を、もっと計算しやすい方程式から取り出せないか」である。この問いが Seiberg–Witten 理論へ向かう。

どこまで分かったか

解析的な解空間から滑らかな不変量を作れるようになった。だが実例で「位相は同じ、滑らかさは違う」と結論するには二本の証明が要る。同相写像は位相的分類から、非微分同相写像は滑らかな不変量から得る。次章でその論理を図式化し、非平滑化可能性との混同を解く。

> **i** 節内演習：挿入次数と切断次元
>
> 実 4 次元の ASD モジュライに、曲面類 $[\Sigma] \in H_2(X)$ に対応する次数 2 の類 $\mu([\Sigma])$ と、点類 $[p] \in H_0(X)$ に対応する次数 4 の類 $\mu([p])$ を挿入する。0 次元まで切る組合せを全て挙げよ。
>
> **解答。** 挿入の総次数が 4 になればよい。非負整数 a, b をそれぞれ曲面挿入、点挿入の個数とすると
>
> $$2a + 4b = 4 \quad \Leftrightarrow \quad a + 2b = 2.$$
>
> 解は $(a, b) = (2, 0), (0, 1)$ である。したがって二つの曲面挿入 $\mu([\Sigma_1])\mu([\Sigma_2])$、または一つの点挿入 $\mu([p])$ が 0 次元の符号付き数え上げを与える。

第 14 章　位相分類と滑らかな分類を照合する

二種類の否定を分ける

第 3 章の E_8 型の例では、位相的 4 多様体は存在するが Donaldson 対角化定理に反するため滑らかな構造を持たない。これは平滑化可能性の障害である。

異種滑らかな構造の主張は別である。滑らかな多様体 X_0, X_1 に対し

$$X_0 \underset{\text{homeo}}{\cong} X_1, \quad X_0 \underset{\text{diff}}{\ncong} X_1$$

の両方を示す必要がある。第一の矢印は Freedman 型の位相的分類や具体的 handle 操作から、第二の否定は Donaldson または Seiberg–Witten 不変量の相違から得る。

> **⚠** 非平滑化可能性は異種滑らかな構造の組ではない
>
> 位相的多様体が一つも滑らかな構造を持たないことと、一つの位相的多様体が互いに非同値な複数の滑らかな構造を持つことは論理的に別である。前者だけから後者は従わない。

この区別は、4 次元特有の議論で特に重要である。Freedman 理論は位相圏で非常に多くの 4 多様体を作る。一方 Donaldson 理論は滑らかな圏で許されるものを強く制限する。両者の差からただちに「異種滑らかな構造の組」が出るように見えるが、論理は一段違う。

非平滑化可能性では、証明すべき文は

```
ある位相的多様体 X は存在する。
もし X が滑らかな多様体なら Donaldson 定理に反する。
従って X は滑らかな構造を持たない。
```

である。ここには二つの滑らかな構造の比較はない。比較対象は「滑らかな構造がある」という仮定そのものである。

異種滑らかな構造の組では、証明すべき文は

```
X_0 と X_1 はどちらも滑らかな多様体である。
X_0 と X_1 は同相である。
しかし滑らかな不変量が異なる。
従って X_0 と X_1 は微分同相ではない。
```

である。ここでは、存在、同相、非微分同相を別々に証明しなければならない。

照合の手順

単連結な候補では、まず交点形式、Kirby–Siebenmann 不変量、向きを照合して同相写像の条件を確認する。次に滑らかな不変量を計算する。もし

$$D_{X_0} \neq D_{X_1}$$

なら、微分同相写像不変性に反するため両者は微分同相ではない。ここで「形式が同じ」だけで同相と断定してはいけないし、「不変量が違う」だけで同相でないと断定してもいけない。

> **i** 本書で使う Freedman 分類の版
>
> X, Y を閉・連結・向き付き・単連結な位相的 4 次元多様体とする。交点形式の向きを保つ整数同型があり、Kirby–Siebenmann 不変量が一致すれば、X と Y は向きを保って同相である。存在については、任意のユニモジュラー対称整数形式がこのような多様体の交点形式として実現される。偶形式では Kirby–Siebenmann 不変量は $\sigma(Q)/8 \pmod 2$ に拘束され、奇形式では同じ形式に対して Kirby–Siebenmann 不変量で区別される二つの位相型がありうる。従って「交点形式だけで常に一意」と短縮してはならない。[2]

連結和は有用だが危険でもある。交点形式は直和になる一方、多くのゲージ不変量は $b_2^+ > 0$ の二つの多様体の連結和で消える。従って位相的構成が滑らかな情報を見えなくすることがある。どの操作の下で不変量がどう振る舞うかを併記する必要がある。

照合を表にすると、必要な証明の役割が見える。

目的	使う情報	失敗すると何が言えないか
位相的存在	Freedman 分類、handle 構成	比較対象の位相空間が存在しない
同相写像	交点形式、Kirby–Siebenmann 不変量、向き	同じ位相空間上の滑らかな構造とは言えない
滑らかな構造の存在	明示的構成、代数曲面、handlebody	異種滑らかな構造の組ではなく非平滑化可能性になる
微分同相でないこと	Donaldson/SW 不変量、対角化定理	滑らかな構造の違いを検出できない

「交点形式が同じだから同相」と言うには、上の定理の仮定を満たしているかを確認する必要がある。特に単連結性、閉性、向き、Kirby–Siebenmann 不変量の扱いを落としてはいけない。逆に、「Donaldson 不変量が違うから同相でない」と言うのも誤りである。Donaldson 不変量は微分同相不変量であって、位相不変量ではない。

例の読み方：E_8 と異種滑らかな構造の組

E_8 型の例を思い出す。Freedman 理論により、対応する位相的 4 多様体は存在する。しかし E_8 格子は定値かつ非対角である。もしこの多様体が滑らかで単連結なら、Donaldson 対角化定理により交点形式は整数上で対角化されるはずであり、矛盾する。したがってこれは「滑らかな構造が存在しない」例である。ここでは X_0 と X_1 を比較していない。

一方、異種滑らかな構造の組を示すときは、たとえば同じ交点形式と同じ Kirby–Siebenmann 不変量を持つ二つの滑らかな多様体を用意し、Freedman 分類で同相と判断する。その後、Donaldson 多項式や Seiberg–Witten 不変量を比較する。値が違えば、微分同相写像が存在すると仮定したときの不変量性に反する。実例の構成ではハンドル体や Kirby 計算が重要な役割を持つ。[1], [8]

この二段階の構造が、4 次元の面白さである。位相分類が粗すぎるから滑らかな構造の違いが残り、滑らかな不変量が細かすぎるからその違いを検出できる。

なぜ同じ交点形式でも十分でないのか

第 2 章では交点形式が中心的な道具だった。しかし、ここまで来るとその限界も明確になる。交点形式は強力な位相的データだが、滑らかな構造を完全には記録しない。

同じ位相的多様体上に複数の滑らかな構造があるなら、当然それらの交点形式は同じである。したがって、交点形式だけを見ている限り、その複数性は見えない。Donaldson 多項式や Seiberg–Witten 不変量は、この「同じ交点形式の下に残る差」を測るために導入される。

これは第 13 章の二出力の違いとも対応する。対角化定理は「許されない交点形式」を排除する。多項式不変量や SW 不変量は「交点形式では区別できない滑らかな構造」を区別する。

照合例：何をどの段階で使うか

抽象的な手順だけでは、Freedman 側と Donaldson/SW 側の役割が混ざりやすい。そこで、実在の有名例を完全計算する代わりに、証明文の形を模型として書く。

まず位相的側で、二つの候補 X_0, X_1 について

$$Q_{X_0} \cong Q_{X_1}, \quad \mathrm{ks}(X_0) = \mathrm{ks}(X_1)$$

を確認し、単連結・閉・向き付きという Freedman 分類の仮定も確認する。ここで ks は Kirby–Siebenmann 不変量である。この段階で得る結論は

$$X_0 \underset{\text{homeo}}{\cong} X_1$$

であり、滑らかな構造についてはまだ何も言っていない。

次に滑らかな側で、たとえば

$$SW_{X_0}(\mathfrak{s}) \neq 0, \quad SW_{X_1}(\mathfrak{s}') = 0$$

または Donaldson 多項式の値の相違を示す。もし微分同相写像 $f : X_0 \to X_1$ があれば、不変量は f によるホモロジーや Spin^c 構造の対応の下で一致しなければならない。従って、対応をすべて考えても値が一致しないなら

$$X_0 \underset{\text{diff}}{\ncong} X_1$$

が従う。

この模型で重要なのは、第一段階と第二段階が独立した証明課題である点である。Freedman 分類だけでは微分同相写像を否定できない。Donaldson/SW 不変量だけでは同相写像を保証できない。異種滑らかな構造は、この二つを同時に満たしたとき初めて得られる。

結び目手術に必要な最小限の結び目語彙

次の例では結び目理論の言葉を少し使う。結び目 $K \subset S^3$ は 3 次元球面の中に滑らかに埋め込まれた円周である。K の小さな管状近傍 νK は中身の詰まったトーラスで、境界は 2 次元トーラスである。

境界トーラス上には二つの基本的な閉曲線がある。**メリディアン**は管状近傍の円板を一周する曲線で、結び目を一回リンクする。**ロンジチュード**は結び目に沿う方向の曲線で、標準的な規約では結び目とのリンク数が 0 になるよう選ぶ。結び目の補空間 $S^3 \setminus \nu K$ は、結び目を抜いた後に残る 3 次元空間であり、その境界トーラス上のメリディアンとロンジチュードが貼り合わせの入力になる。

Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ は、結び目補空間から得られる不変量である。本書ではその構成を完全には証明しないが、二つの値だけを使う。

$$\Delta_U(t) = 1, \qquad \Delta_{3_1}(t) = t - 1 + t^{-1}.$$

ここで U は自明結び目、3_1 は右手三葉結び目である。この多項式が後で Seiberg–Witten 級数に掛かるため、結び目の違いが 4 多様体の滑らかな構造の違いとして検出される。

実在する異種対：K3 と三葉結び目手術

K3 曲面は、複素曲面の代表例であり、滑らかな四次曲面 $X = \{F_4 = 0\} \subset \mathbb{CP}^3$ として作れる。標準的な事実として単連結で、正準類は $K = 0$、Euler 数は $\chi = 24$、署名は $\sigma = -16$ である。したがって $b_2 = 22$、$b_2^+ = 3$、$b_2^- = 19$ となり、交点形式は

$$3H \oplus 2(-E_8)$$

で表される。以下では、同じ K3 を楕円曲面 $E(2)$ として見て、楕円ファイバーを使う。

$X = E(2)$ を K3 曲面とし、$T \subset X$ を自己交点 0 の正則楕円ファイバーとする。このとき $X \setminus \nu T$ は単連結である。結び目 $K \subset S^3$ に対し、Fintushel–Stern の 結び目手術 を

$$X_K = \big(X \setminus (T^2 \times D^2) \big) \cup_{T^3} \big(S^1 \times (S^3 \setminus \nu K) \big)$$

で定める。左辺の $T^2 \times D^2$ は楕円ファイバー T の近傍で、境界は $T^3 = T^2 \times S^1$ である。右辺の $S^1 \times (S^3 \setminus \nu K)$ も境界に $S^1 \times \partial \nu K \cong T^3$ を持つ。貼り合わせでは、T の法線円周 $\mu_T = \{\mathrm{pt}\} \times \partial D^2$ を、結び目 K の優先ロンジチュード λ_K に対応させる。右辺に新しく付ける余分な S^1 と、$\partial \nu K$ 上のメリディアン μ_K が、境界 3 トーラスの残る二つの生成元を与える。この同定を取り違えて μ_T を μ_K に送ると、標準的な Fintushel–Stern 結び目手術ではなくなる [6]。この対応があるため、結び目補空間の Alexander 多項式が、ファイバー類 $[T]$ を変数とする SW 級数へ現れる。

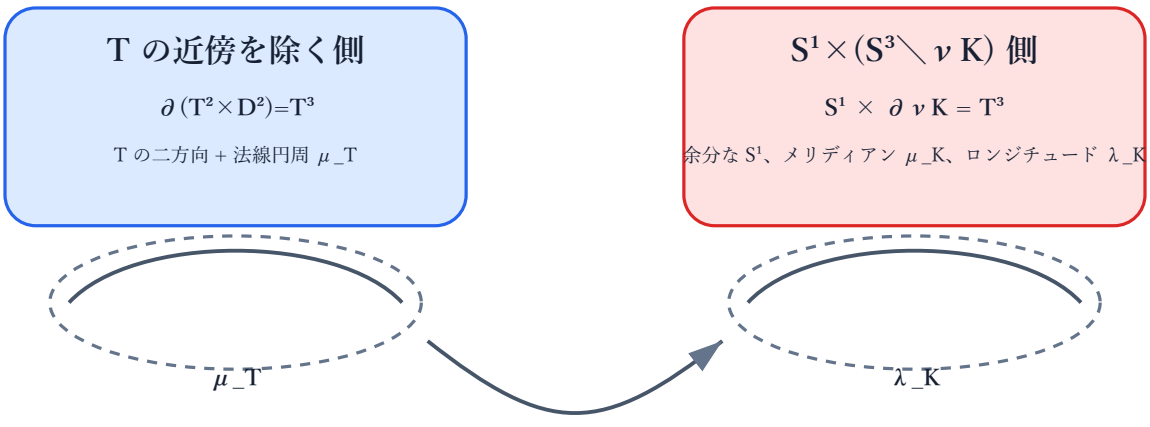


図 13: 結び目手術の境界 3 トーラスでは、トーラス近傍側の法線円周を結び目補空間側の標準ロンジチュードへ対応させる。

境界の三つの方向を表にすると、混同しにくい。

左側 $T^2 \times \partial D^2$	右側 $S^1 \times \partial \nu K$	役割
T の一方向	余分な S^1 方向	ファイバー内の一方向を保つ
T のもう一方向	μ_K 方向	境界 3 トーラスの残る生成元
法線円周 μ_T	標準ロンジチュード λ_K	結び目補空間の情報を SW 級数へ入れる

標準ロンジチュードは、結び目とのリンク数が 0 になるように選んだ境界曲線である。メリディアンは結び目を一回リンクする曲線なので、役割が違う。$\mu_T \mapsto \lambda_K$ という対応は、手術後の補空間の基本群を制御し、Alexander 多項式がファイバー類を変数として現れるための入力である。

> **i** 引用定理｜結び目手術で使う入力と出力
>
> 上の K3 ファイバーに対して X_K は閉単連結滑らか 4 次元多様体であり、K3 と向きを保って同相である。また Seiberg–Witten 級数は
>
> $$\mathcal{SW}_{X_K} = \mathcal{SW}_{K3}\, \Delta_K(t), \qquad t = e^{2\,\mathrm{PD}[T]}$$
>
> を満たす。ここで $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$ かつ $\Delta_K(1) = 1$ と規格化する。K3 では $\mathcal{SW}_{K3} = 1$ である。

この定理を 自明結び目 U と右手 三葉結び目 3_1 に適用する。X_U は K3 と微分同相で、$\Delta_U(t) = 1$ だから基本類は 0 の一つである。一方

$$\Delta_{3_1}(t) = t - 1 + t^{-1}$$

なので、X_{3_1} の基本類は $0, \pm 2\ \mathrm{PD}[T]$ の三つであり、それぞれの係数は $-1, 1, 1$（全体符号の選択を除く）となる。したがって基本類の個数が異なる。

証明の流れを分離して書くと、次の四段階になる。

1. **入力**：同じ K3 上の楕円ファイバーに 自明結び目 と 三葉結び目 の 結び目手術 を施す。
2. **位相的同一視**：結び目手術 定理により両者は単連結で K3 と同じ交叉形式 $3H \oplus 2(-E_8)$ と Kirby–Siebenmann 不変量 0 をもち、Freedman 分類から互いに同相である。
3. **滑らかな識別**：Seiberg–Witten 級数の積公式により、基本類の個数は 1 と 3 で異なる。向きを保つ微分同相は基本類の集合を保つので、両者は微分同相ではない。
4. **結論**：(X_U, X_{3_1}) は同相だが微分同相でない実在する異種対である。

Alexander 多項式の差だけから同相性が従うのではない。同相性には補空間の単連結性と Freedman 分類を、非微分同相性には Seiberg–Witten 不変量を、それぞれ別に使っている。

操作で不変量が消える危険

候補を作るとき、連結和や blow-up は自然な操作である。しかし、操作は不変量にも作用する。例えば SW 不変量は、$b_2^+ > 0$ の多様体同士の連結和で消える典型的な振る舞いを持つ。Donaldson 不変量にも、ブローアップ公式や連結和に関する規則がある。

したがって、候補を位相的に作る操作と、滑らかな不変量を残す操作は同時に管理しなければならない。位相分類に都合のよい操作が、滑らかな情報を消してしまうことがある。この点が、実際の異種滑らかな構造の組構成を難しくし、同時に面白くしている。

$\mathbb{R}^4$ の異種性が示す境界

コンパクト単連結 4 多様体の議論とは別に、$\mathbb{R}^4$ には標準とは微分同相ではない滑らかな構造が存在する。交点形式は自明なので、コンパクト多様体用の形式だけでは検出できない。無限遠の構造と埋め込みが本質になり、閉多様体の Donaldson 不変量をそのまま適用する話ではない。

この例は、どの不変量にも定義域と盲点があることを教える。本書の主線は閉多様体であり、開 4 多様体の分類を結論に混ぜない。

第二のゲージ理論が必要な理由

Donaldson 理論は強力だが、非可換ゲージ群、可約、Uhlenbeck コンパクト化、μ写像の計算が重い。1994 年に現れた Seiberg–Witten 方程式は、可換接続とスピノルを連成させ、しばしばコンパクト性と計算を大幅に扱いやすくした。しかし「可換だから線形」というわけではない。

次章では、スピノルがどこから来るかを Dirac 作用素の型から導く。新理論を結果一覧として追加するのではなく、ASD 機械のどの難所を別の未知量で組み替えるのかを見る。

> **i** 節内演習：異種滑らか構造の論理
>
> 閉単連結 4 多様体 X, Y が同じ交点形式を持ち、Freedman 型分類の仮定を満たすとする。また、ある滑らかな不変量が $I(X) \neq I(Y)$ を与えるとする。どの結論にどの入力を使うか整理せよ。
>
> **解答。** 位相側では
>
> $$Q_X \cong Q_Y \quad \Rightarrow \quad X \underset{\text{homeo}}{\cong} Y.$$
>
> ここで矢印には、上で明記した Freedman 型分類の仮定を用いている。 一方、微分同相写像があれば滑らかな不変量は保存されるので
>
> $$X \underset{\text{diff}}{\cong} Y \Rightarrow I(X) = I(Y).$$
>
> その対偶から $I(X) \neq I(Y)$ は非微分同相を与える。二つを合わせて初めて「同相だが微分同相でない」と結論でき、非平滑化可能性だけではこの結論にならない。

Part V　Seiberg-Witten 理論

第 15 章　なぜスピノルが必要になるのか

2 形式だけでなく一次の作用素を使う

Donaldson 理論では接続の曲率を自己双対成分へ射影した。第二の理論では、接続に加えて一次微分を受ける場を導入する。その自然な候補がスピノルである。

90 度回転から複素数へ

平面で

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J^2 = -I$$

と置くと、$J(x, y) = (-y, x)$ は反時計回りの 90 度回転である。実平面を複素直線と見れば、J は i 倍であり、角度 θ の回転は

$$e^{\theta J} = \cos\theta\, I + \sin\theta\, J$$

となる。通常のベクトルは 2π 回転で元へ戻る。スピノルでは回転角の半分が現れる。

パウリ行列を手で掛ける

三つのパウリ行列を

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\ i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

とする。直接掛け算すると $\sigma_j^2=I$ で、例えば $\sigma_1\sigma_2=i\sigma_3$、$\sigma_2\sigma_1=-i\sigma_3$ である。まとめると

$$\sigma_j\sigma_k+\sigma_k\sigma_j=2\delta_{jk}I,\qquad \sigma_j\sigma_k=\delta_{jk}I+i\sum_{\ell=1}^{3}\varepsilon_{jk\ell}\sigma_\ell.$$

第一式が Clifford 反交換関係の原型である。$\tau_j=-i\sigma_j/2$ と置けば

$$[\tau_j,\tau_k]=\sum_{\ell}\varepsilon_{jk\ell}\tau_\ell$$

となり、τ_1,τ_2,τ_3 は $\mathfrak{su}(2)$ の実基底をなす。

$SU(2)$ が $SO(3)$ を二重に覆う

$x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ を $x\cdot\sigma=\sum_j x_j\sigma_j$ に対応させる。$U\in SU(2)$ による共役 $x\cdot\sigma\mapsto U(x\cdot\sigma)U^{-1}$ は

$$\det(x\cdot\sigma)=-|x|^2$$

を保つので、$\mathbb{R}^3$ の向きを保つ回転を定める。これが準同型 $SU(2)\to SO(3)$ であり、核は $\{I,-I\}$ である。単位ベクトル n の周りの角度 θ の回転を持ち上げる元は

$$U(\theta,n)=\exp\!\left(-\frac{i\theta}{2}n\cdot\sigma\right)=\cos\frac{\theta}{2}I-i\sin\frac{\theta}{2}n\cdot\sigma.$$

従って $U(2\pi,n)=-I$、$U(4\pi,n)=I$ である。ベクトルは U と $-U$ を同じ回転と見るが、スピノルは U 自身で変換するため、2π 回転で符号が反転する。

$\mathbb{R}^4$ の Clifford 作用と Dirac 作用素

4 次元で半スピノル W^+,W^- が二つに分かれる理由は、単なる記法ではない。向き付き 4 次元 Euclid 空間では、回転群の二重被覆が

$$\mathrm{Spin}(4)\cong SU(2)_+\times SU(2)_-$$

と二つの因子へ分かれる。この二つの $SU(2)$ がそれぞれ 2 次元複素表現を持ち、それが W^+ と W^- になる。1 形式による Clifford 作用は、同じ半スピノルの中に留まらず

$$T^*\otimes W^+\to W^-,\qquad T^*\otimes W^-\to W^+$$

を結ぶ。このため、Dirac 作用素は正スピノルから負スピノルへ送る一次作用素として現れる。

$W^+\cong\mathbb{C}^2$、$W^-\cong\mathbb{C}^2$ とし、$W^+\oplus W^-$ 上で

$$c(e_j)=\begin{pmatrix}0&-i\sigma_j\\ -i\sigma_j&0\end{pmatrix}\quad(j=1,2,3),\qquad c(e_4)=\begin{pmatrix}0&I\\-I&0\end{pmatrix}$$

と置く。パウリ行列の反交換関係から

$$c(e_\mu)c(e_\nu)+c(e_\nu)c(e_\mu)=-2\delta_{\mu\nu}I$$

が従う。これが Euclid 計量に対する Clifford 関係である。

符号を整理しておく。パウリ行列そのものは

$$\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i=2\delta_{ij}I$$

を満たす。一方、Riemann 計量に対する Clifford 作用は通常

$$c(v)c(w)+c(w)c(v)=-2g(v,w)I$$

を満たすように取る。したがって本書では、空間方向に $-i\sigma_j$ を置くことで符号を合わせている。σ_j をそのまま Clifford 作用と呼ぶと、反交換関係の符号が逆になり、Dirac 作用素の二乗や Weitzenböck 公式の曲率項までずれる。文献の式を移すときは、パウリ行列の代数と Clifford 作用の代数を分けて読む。

平坦な $\mathbb{R}^4$ の正スピノルに作用する Dirac 作用素は、この規約では

$$D^{+} = -(\partial_4 I + i\sigma_1\partial_1 + i\sigma_2\partial_2 + i\sigma_3\partial_3).$$

$\Phi = (f, g)^{T}$ に作用させると

$$D^{+}\Phi = -\begin{pmatrix} \partial_4 + i\partial_3 & i\partial_1 + \partial_2 \\ i\partial_1 - \partial_2 & \partial_4 - i\partial_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

反交換関係により随伴との合成では混合微分が相殺し、成分ごとのラプラシアンが残る。曲がった多様体では偏微分を共変微分へ置き換え、その交換子としてスカラー曲率と束の曲率が現れる。これが第 16 章の Weitzenböck 公式へ続く。

普通のベクトルは空間内で 2π 回転すると元に戻る。これに対してスピノル ψ は 2π 回転で $-\psi$ となり、さらにもう一周、合計 4π 回転して初めて ψ に戻る。この違いは、スピノルが回転群 $SO(3)$ そのものではなく、その二重被覆 $Spin(3) \cong SU(2)$ の表現として変換することを表す。

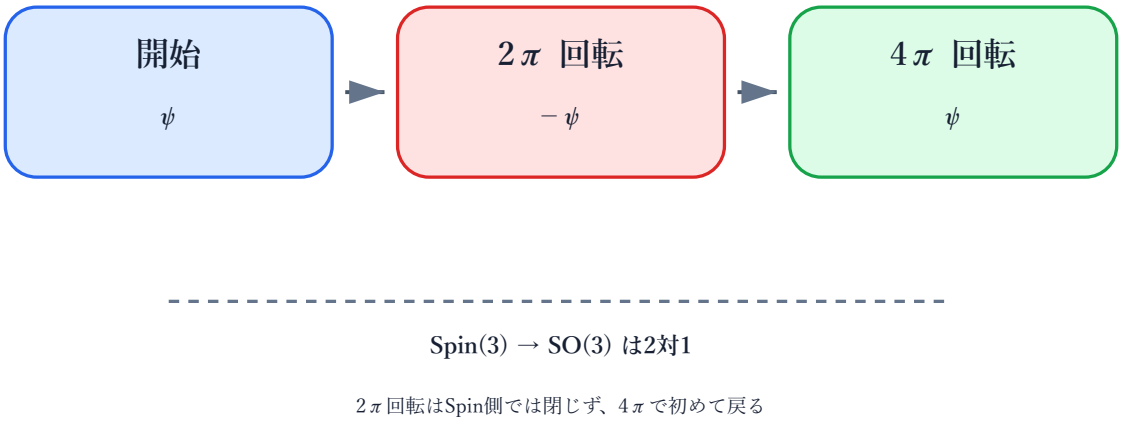


図 14: スピノルは 2π 回転で符号が反転し、4π 回転で初めて元に戻る。

図 14 の符号反転は、同じ幾何学的な回転に二つの Spin 側の元が対応することから生じる。ただし量子状態を射線として見る文脈では全体位相だけを直接観測できない場合もある。本書で必要なのは、スピノル場の変換則が通常の接ベクトルの変換則とは異なるという数学的事実である。

向き付き Riemannian 4 多様体上の Spin^{c} 構造は、階数 2 の複素ベクトル束 W^{+}, W^{-} と Clifford 作用

$$\rho : T^{*}X \otimes \mathbb{C} \to \mathrm{Hom}(W^{+}, W^{-})$$

を与える。W^{+} の行列式線束を L と書く。L 上のユニタリ接続 A と Levi–Civita 接続から W^{+} の共変微分が定まり、合成

$$D_A : \Gamma(W^{+}) \xrightarrow{\nabla_A} \Gamma(T^{*}X \otimes W^{+}) \xrightarrow{\rho} \Gamma(W^{-})$$

が Spin^{c} Dirac 作用素である。

ここで使う「接続」は、L 上の $U(1)$ 接続を選ぶと $W^{\pm}$ 上の接続が誘導される、という意味である。従って SW 理論の未知量は、任意のベクトル束接続ではなく、固定した Spin^{c} 構造の行列式線束上の接続 A と、正スピノル $\Phi \in \Gamma(W^{+})$ である。

Spin でなく Spin^c なのはなぜか

w_2 をここで最小限だけ定義しておく。係数を $\mathbb{Z}/2$ にすると、整数の偶奇だけを記録するコホモロジー群 $H^2(X;\mathbb{Z}/2)$ が使える。整数係数の類 $x \in H^2(X;\mathbb{Z})$ を $\bmod 2$ で見るとは、任意の 2 サイクルへの評価を偶奇だけへ落とすことである。

実ベクトル束 $E \to X$ には Stiefel–Whitney 類 $w_i(E) \in H^i(X;\mathbb{Z}/2)$ があり、$w_2(E)$ はその第二類である。本書では一般構成は引用し、役割を使う。$w_2(E)$ は、局所的な直交フレームを Spin 群へ持ち上げて全体で貼り合わせられるかを測る障害である。特に接束について

$$w_2(TX) = 0$$

なら spin 構造が存在する。ただし一般の実ベクトル束では、Spin 構造を語る前に向き付け可能性、つまり $w_1(E) = 0$ も必要である。本書の 4 多様体は向き付きなので接束では $w_1(TX) = 0$ がすでに満たされており、残る障害が $w_2(TX)$ になる。これは $w_2(P)$ のように別の主束に付く類とは対象が違う。右辺が TX なのか、Donaldson 理論の補助束 P なのかを必ず区別する。

交点形式との関係も一つだけ使う。閉向き付き 4 多様体では、任意の整数類 $x \in H^2(X;\mathbb{Z})$ に対し、Wu 公式から

$$x \cdot x \equiv x \cdot w_2(TX) \pmod 2$$

が成り立つ。右辺では x を $\bmod 2$ へ落としてから $w_2(TX)$ と評価している。$\mathbb{CP}^2$ では超平面類 h が $h^2 = 1$ を満たすので、全ての mh について

$$(mh)^2 = m^2 \equiv m \pmod 2$$

である。従って $w_2(T\mathbb{CP}^2) \equiv h \pmod 2$ と読める。

spin 構造の存在には $w_2(TX) = 0$ が必要で、全ての向き付き 4 多様体で満たされるわけではない。Spin^c 構造では線束の $c_1(L)$ が $\bmod 2$ で $w_2(TX)$ を持ち上げるため、向き付き 4 多様体上で広く利用できる。つまり

$$c_1(L) \equiv w_2(TX) \pmod 2$$

が基本条件である。理論の適用範囲を保つための一般化であり、記号の装飾ではない。

Spin^c 構造をどう数えるか

Spin^c 構造は一つだけではない。固定した向き付き 4 多様体上で、同型類の集合は $H^2(X;\mathbb{Z})$ のトーサー、すなわち主等質空間として振る舞う。直感的には、行列式線束 L を別の線束でひねると別の Spin^c 構造が得られる。

重要な制約は

$$c_1(L) \equiv w_2(TX) \pmod 2$$

である。従って SW 不変量は、単に多様体に一つ付く数ではなく、許される特性類ごとに並ぶ数である。後で SW 基本類と呼ぶものは、この $c_1(L)$ のうち不変量が非零になる特別な類である。ただし、$c_1(L)$ だけで Spin^c 構造が常に一意に決まるわけではない。$H^2(X;\mathbb{Z})$ に 2-torsion があると、同じ $c_1(L)$ を持つ異なる Spin^c 構造がありうる。本書で $c_1(L)$ を添字のように使うときは、torsion のない模型または「構造 $\mathfrak{s}$ を固定し、その行列式線束の c_1 を読む」という意味である。

この時点で Donaldson 理論との違いが見え始める。Donaldson 側では主に非可換束の位相数を動かしてモジュライを作った。SW 側では、Spin^c 構造そのものが不変量の添字になる。

例：$\mathbb{CP}^2$ で特性類を見る

$\mathbb{CP}^2$ では $H^2(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}h$ で、$h^2 = 1$ である。接束の第二 Stiefel–Whitney 類は $w_2(T\mathbb{CP}^2) \equiv h \pmod 2$ と表される。したがって行列式線束の第一 Chern 類は

$$c_1(L) = (2m+1)h$$

の形でなければならない。偶数倍の h は合同条件を満たさないので、Spin^c 構造の候補にならない。

この例で見えることは二つある。第一に、Spin^c 構造は「spin 構造がないときの代用品」ではあるが、任意の線束を自由に選べるわけではない。第二に、SW 不変量は m ごとに別のモジュライ問題を作る。Donaldson 理論で位相数を変えるとモジュライが変わったように、SW 理論では特性類を変えると方程式の位相的入力が変わる。

トーサーという言葉の意味

トーサー、または主等質空間とは、基準点を選ぶと群と同一視できるが、自然なゼロ元はない集合を指す。これは torsion、すなわちねじれ元やねじれ部分群とは別の概念である。Spin^c 構造の集合も同じで、一つの構造 $\mathfrak{s}_0$ を基準に選べば、線束 E でひねって

$$\mathfrak{s}_0 \otimes E$$

を作れる。しかし、どの $\mathfrak{s}_0$ を「原点」と呼ぶかは自然ではない。したがって、Spin^c 構造の集合は $H^2(X;\mathbb{Z})$ そのものではなく、$H^2(X;\mathbb{Z})$ が自由かつ推移的に作用する集合として扱うのが正確である。

この区別は不変量の添字で効く。$SW_X(\mathfrak{s})$ と書くとき、$\mathfrak{s}$ は数値ではなく幾何的構造である。基準を選んで $c_1(L)$ でラベル付けしてもよいが、本文では「ラベル」と「構造」そのものを混同しない。

曲率とスピノルを同じ型で結ぶ

4 次元の Clifford 作用は、虚数値の自己双対 2 形式を W^+ のトレース 0 の Hermitian 自己準同型と同一視する。本書では、接続 A は $L = \det W^+$ 上の接続であるという規約を全章で固定する。

> **i SW 側の型規約**
>
> Clifford 作用の自己双対 2 形式への制限を
>
> $$\rho : i\Lambda^2_+ \to \mathrm{Herm}_0(W^+)$$
>
> と読む。ここで $\mathrm{Herm}_0(W^+)$ はトレース 0 の Hermitian 自己準同型の束である。スピノル $\Phi \in W^+$ に対し、Hermitian 自己準同型 $\Phi\Phi^* : v \mapsto \Phi\langle \Phi, v\rangle$ を作り、そのトレース 0 部分を $(\Phi\Phi^*)_0$ と書く。二次写像 $q(\Phi)$ は
>
> $$\rho(q(\Phi)) = (\Phi\Phi^*)_0$$
>
> で定まる虚数値自己双対 2 形式である。この規約では $\langle \rho(q(\Phi))\Phi, \Phi\rangle$ は正の定数倍の $|\Phi|^4$ になる。文献により Clifford 作用の符号や $1/2$ を q 側へ入れるため、式を移すときは二次写像だけでなく Weitzenböck 公式も同時に変換する。

この規約なら $q(\Phi)$ は $i\Lambda^2_+$ の切断であり、L 上のユニタリ接続の曲率 F_A^+ と同じ型を持つ。従って

$$D_A\Phi = 0, \quad F_A^+ = q(\Phi) + i\eta$$

という連成が型の上で意味を持つ。ここで η は実自己双対 2 形式で、$i\eta$ が虚数値 2 形式である。

局所的に $W^+ \cong \mathbb{C}^2$ と見れば、スピノル Φ から二次写像

$$(\Phi\Phi^*)_0$$

を作る。これはまずトレース 0 の Hermitian 自己準同型であって、まだ 2 形式ではない。上の Clifford 同一視の逆を通して初めて、曲率と比較できる虚数値自己双対 2 形式になる。この一段を省くと、式の両辺の型も Weitzenböck 評価の符号も決まらない。

もし Φ を入れず $F_A^+ = 0$ だけを $U(1)$ 接続へ課せば、方程式はほぼ線形で、交点形式を越える滑らかな情報を十分に作れない。スピノルの二次項が非線形性を戻し、同時に Weitzenböck 公式を通じて強い先験的な上界を与える。

二次写像 $q(\Phi)$ は何をしているか

局所的に $W^+ \cong \mathbb{C}^2$ と見れば、スピノル Φ から階数 1 の自己準同型 $\Phi\Phi^*$ が作れる。そのトレース部分は大きさ $|\Phi|^2$ だけを表すので、曲率の自己双対成分と対応させるにはトレース 0 部分を取る。

$$\rho(q(\Phi)) = (\Phi\Phi^*)_0.$$

この写像は二次であり、$q(e^{i\theta}\Phi) = q(\Phi)$ を満たす。つまり S^1 ゲージ変換でスピノルの位相が変わっても、曲率方程式の右辺は不変である。可換ゲージ理論に非線形性を戻すだけでなく、ゲージ対称性と両立するためにも、この形が自然に選ばれる。

読者がここで持つ疑問は「なぜスピノルから 2 形式が出るのか」である。答えは 4 次元の Clifford 表現にある。$i\Lambda^2_+$ は W^+ のトレース 0 の Hermitian 自己準同型と同じ情報を持つので、$q(\Phi)$ を虚数値自己双対 2 形式として読める。

ゲージ対称性は可換でも残る

A は行列式線束 $L = \det W^+$ の接続である。$u : X \to S^1$ が $W^\pm$ のスピノルへ重み 1 で作用すると、行列式には重み 2 で作用する。このためゲージ変換は

$$(A, \Phi) \mapsto (A - 2u^{-1}du, u\Phi)$$

である。この係数 2 は変数の選び方ではなく、本書が A を行列式線束の接続と呼ぶことから決まる。文献が $A - u^{-1}du$ と書く場合、その A は行列式接続の半分に相当する Spin^c 接続変数であり、本書の F_A とそのまま混ぜてはならない。接続部分は可換なので $A \wedge A$ を持たないが、スピノルとの連成と $q(\Phi)$ があるため全系は線形ではない。モジュライ空間を作るには、Donaldson 側と同様に対称性、線形化、指数、正則性、向き、コンパクト性を再確認する必要がある。

次章では perturbed Seiberg–Witten 方程式を正確に置き、期待次元とコンパクト性がどこから来るかを導く。

> **i** 節内演習：スピノルの 2π 回転と 4π 回転
>
> 回転角 θ に対するスピノル表現を
>
> $$U(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$
>
> とする。$U(2\pi)$ と $U(4\pi)$ を計算し、通常のベクトル表現との違いを述べよ。
>
> **解答。** 直接代入すると
>
> $$U(2\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I, \qquad U(4\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$
>
> したがってスピノルは 2π 回転で符号が反転し、4π 回転で初めて元に戻る。ベクトルは 2π 回転で元に戻るため、$\mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ が二重被覆であることが具体的に見える。

第 16 章　Seiberg–Witten 方程式とモジュライ空間

方程式と摂動

Spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ を固定し、行列式線束 L の接続 A と正スピノル Φ を未知量とする。第 15 章の規約に従い、F_A^+ と $q(\Phi)$ はどちらも $i\Lambda^2_+$ の切断である。実自己双対 2 形式 η を摂動として

$$\begin{cases} D_A\Phi = 0, \\ F_A^+ = q(\Phi) + i\eta \end{cases}$$

を Seiberg–Witten 方程式とする。係数は q の規格化に吸収されるため、文献間で式を比較するときは、Clifford 同一視、i の位置、二次写像の係数を同時に確認する。[9], [10]

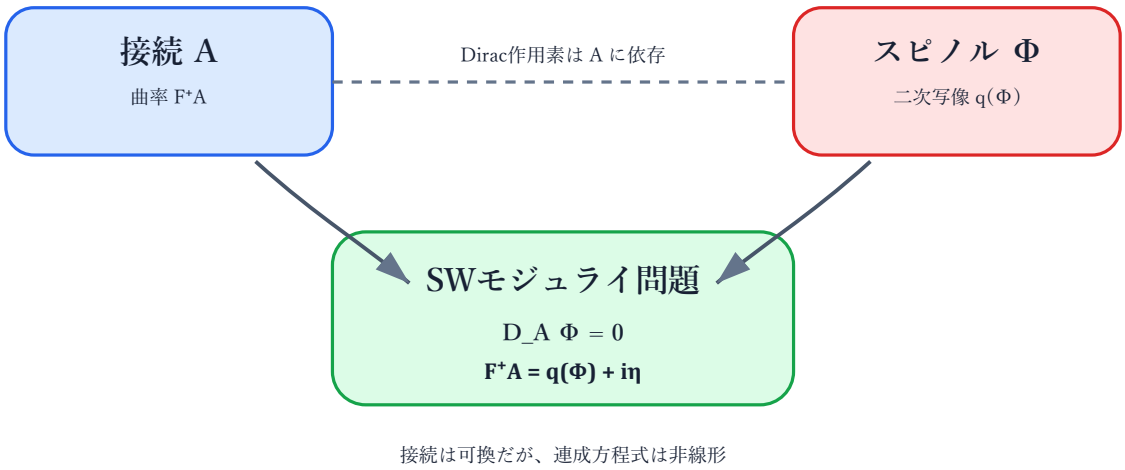


図 15: Seiberg–Witten 方程式では、可換接続の曲率とスピノルの二次式が同じ型で結ばれ、Dirac 方程式が両者を連成させる。

$\Phi = 0$ の解は可約であり、第二式は $F_A^+ = i\eta$ となる。一般的な摂動と $b_2^+ > 0$ の条件を用いて可約を避けるのが、滑らかなモジュライを作る基本方針である。

線形化と期待次元

第 15 章で A を行列式線束の接続と固定したので、$u = e^{tf}$ を $t = 0$ で微分した無限小ゲージ変換は

$$f \mapsto (-2df, f\Phi), \qquad f \in \Omega^0(i\mathbb{R})$$

である。方程式の線形化とゲージ固定を合わせた作用素は、0 階項を除けば

$$\Omega^1(i\mathbb{R}) \oplus \Gamma(W^+) \to \Omega^0(i\mathbb{R}) \oplus \Omega^2_+(i\mathbb{R}) \oplus \Gamma(W^-)$$

となる。係数 2 と Φ を含む項は主記号を変えず、主記号は $d^* \oplus d^+$ と Dirac 作用素の直和なので楕円的である。指数定理から実期待次元

$$d(\mathfrak{s}) = \frac{c_1(L)^2 - (2\chi(X) + 3\sigma(X))}{4}$$

を得る。

この式も実際の次元を無条件には与えない。正則摂動で余核を消し、可約を避けたときに滑らかな多様体の次元になる。

線形化の 0 階項も、どこから来るかを見ておく。接続を $A + a$、スピノルを $\Phi + \phi$ と動かすと、Dirac 方程式の一次項は

$$D_A\phi + \frac{1}{2}\rho(a)\Phi$$

の形になる。係数 $\frac{1}{2}$ は規約の飾りではない。第 15 章で A は $L = \det W^+$ の接続とした。$\mathrm{Spin}^c(4) = (\mathrm{Spin}(4) \times U(1))/\{\pm 1\}$ では、スピノルには $U(1)$ が重み 1 で、行列式線束には重み 2 で作用する。従って行列式接続を $A + a$ に変えると、$W^\pm$ 上のスピノル接続には可換部分として $\frac{1}{2}a$ が加わる。局所的には

$$\nabla^W_{A+a} = \nabla^W_A + \frac{1}{2}a, \qquad D_{A+a}(\Phi + \phi) = D_A\Phi + D_A\phi + \frac{1}{2}\rho(a)\Phi + O(a\phi).$$

監査用に型も書いておく。$a \in \Omega^1(i\mathbb{R})$ なので $\rho(a) : W^+ \to W^-$ であり、$\frac{1}{2}\rho(a)\Phi$ は $\Gamma(W^-)$ の切断で、Dirac 方程式の値域と一致する。曲率方程式では

$$d^+ a - dq_\Phi(\phi)$$

が現れる。ここで $dq_\Phi(\phi)$ は $\Phi\phi^* + \phi\Phi^*$ のトレース 0 部分を Clifford 同一視で 2 形式へ戻したものである。これらは主記号には影響しないが、横断性や可約解の近くの局所形には影響する。従って「期待次元の式に入らない項」と「解析上無視できる項」は同じではない。

期待次元の代入例

式だけでは、$d(\mathfrak{s})$ が何を測っているか見えにくい。そこで $\mathbb{CP}^2$ で形式的に代入してみる。$\chi(\mathbb{CP}^2) = 3$、$\sigma(\mathbb{CP}^2) = 1$ なので

$$2\chi + 3\sigma = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9.$$

前章の通り、許される $c_1(L)$ は $(2m+1)h$ の形である。従って

$$c_1(L)^2 = (2m+1)^2$$

であり、

$$d(\mathfrak{s}_m) = \frac{(2m+1)^2 - 9}{4}.$$

$m = 1$ または $m = -2$ なら $(2m+1)^2 = 9$ で、期待次元は 0 になる。$m = 0$ なら $d = -2$ であり、一般的には解が存在しない方向を示す。ここで得た数は、ただちに不変量の値ではない。向き、正則性、可約回避、部屋の問題を処理して初めて、点を符号付きに数える段階へ進める。

この計算例は、SW 理論がなぜ計算可能に見えるかも示している。Donaldson 多項式では非可換 ASD モジュライと μ-挿入を扱う必要があった。一方、SW 側ではまず Spin^c 構造ごとの期待次元を、特性類と χ, σ から直接読める。ただし、方程式が簡単になったわけではなく、計算の入口が明瞭になったというのが正確である。

Weitzenböck 公式からコンパクト性評価を得る

Dirac 作用素には

$$D_A^* D_A \Phi = \nabla_A^* \nabla_A \Phi + \frac{s}{4}\Phi + \frac{1}{2}\rho(F_A^+)\Phi$$

という Weitzenböck 公式がある。係数 $1/2$ は、A を行列式線束の接続とする第 15 章の規約に対応する。曲率方程式を代入すると $|\Phi|^4$ の正項が現れるが、ここでは積分恒等式と最大値原理に使う点ごとの恒等式を分けて扱う。

積分恒等式と点ごとの評価を分ける

まず閉多様体上で $D_A\Phi = 0$ と Φ の L^2 内積を取り、部分積分すると

$$0 = \int_X \Big(|\,\nabla_A \Phi\,|^2 + \frac{s}{4}\,|\,\Phi\,|^2 + \frac{1}{2}\langle \rho(F_A^+)\Phi, \Phi\rangle \Big) d\mathrm{vol}$$

を得る。第 15 章の規約では $\rho(q(\Phi)) = (\Phi\Phi^*)_0$ であり、階数 2 なので

$$(\Phi\Phi^*)_0 \Phi = \frac{1}{2}|\Phi|^2 \Phi.$$

従って未摂動なら

$$0 = \int_X \Big(|\,\nabla_A \Phi\,|^2 + \frac{s}{4}\,|\,\Phi\,|^2 + \frac{1}{4}\,|\,\Phi\,|^4 \Big) d\mathrm{vol}.$$

摂動がある場合は $\frac{1}{2}\langle \rho(i\eta)\Phi, \Phi\rangle$ が加わり、Young の不等式で四次項へ吸収できる。

L^∞ 評価には別に点ごとの Bochner 恒等式を使う。ここではスカラーラプラシアンを $\Delta = d^*d = -\operatorname{div}\nabla$ と取る。この規約では、関数 f が最大値を取る点で $\Delta f \geq 0$ である。Bochner 恒等式は点ごとに

$$\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 = \langle \nabla_A^*\nabla_A\Phi, \Phi\rangle - |\nabla_A\Phi|^2$$

と書けるので、$|\Phi|^2$ が最大になる点では

$$\langle \nabla_A^*\nabla_A\Phi, \Phi\rangle \geq 0$$

である。SW 方程式と Weitzenböck 公式をその点で代入すると、未摂動なら

$$0 \geq \frac{s}{4}|\Phi|^2 + \frac{1}{4}|\Phi|^4$$

となり、$|\Phi|^2$ が大きくなりすぎると右辺の四次項により矛盾する。摂動 $i\eta$ がある場合は

$$\frac{1}{4}|\Phi|^4 \leq \frac{s_-}{4}|\Phi|^2 + C|\eta|\,|\Phi|^2$$

を得る。最大点で $|\Phi|^2 = 0$ なら上界は自明である。$|\Phi|^2 > 0$ なら両辺を $|\Phi|^2$ で割り、

$$\frac{1}{4}|\Phi|^2 \leq \frac{s_-}{4} + C|\eta|$$

を得る。従って二次不等式を解くと

$$\| \Phi \|_{L^\infty}^2 \leq C\left(\| s_- \|_{L^\infty} + \| \eta \|_{L^\infty} \right), \qquad s_- = \max\{-s, 0\},$$

となる。C は規格化にのみ依存する。積分後に $|\nabla_A\Phi|^2$ が現れる理由と、最大値点で上界が出る理由を同じ等式として書いてはならない。

ASD 理論ではエネルギー上界だけでは尺度の崩壊を防げなかった。SW 理論では、このスピノル上界がコンパクト性証明の第一段階になる。曲率の自己双対部分は第二式で抑えられ、$[F_A/(2\pi i)] = c_1(L)$ が曲率の調和 2 形式成分を固定する。

基準接続 A_0 を固定し $A = A_0 + \alpha$ と書く。Coulomb 条件 $d^*\alpha = 0$ と曲率方程式から、楕円評価は α の調和成分以外を制御する。ただし調和 1 形式成分は $c_1(L)$ や摂動だけでは固定されない。ゲージ変換で割ると、その自由度は正規化に応じた格子を法とする

$$H^1(X;\mathbb{R})/H^1(X;\mathbb{Z})$$

型のコンパクトなトーラスになる。本書の係数 2 の規約では格子に 2π の定数が付くが、コンパクト性という結論は同じである。このトーラスの基本領域から代表を選び、スピノル上界、曲率方程式、Coulomb ゲージ、楕円評価を組み合わせて収束部分列を得る。Weitzenböck 公式だけが単独でコンパクト性を作るのではない。

流れを短い鎖で書けば、

$$\text{Weitzenböck 評価} \Rightarrow \| \Phi \|_{L^\infty} \text{ の上界} \Rightarrow F_A^+ \text{ の上界} \Rightarrow \alpha \text{ の楕円評価} \Rightarrow \text{ゲージ同値を除く収束}$$

である。この鎖では、Spin^c 構造、計量、摂動の有界な範囲を固定している。第一矢印は点ごとの最大値原理、第二矢印は曲率方程式 $F_A^+ = q(\Phi) + i\eta$、第三矢印は $[F_A/(2\pi i)] = c_1(L)$ による調和成分の固定と Coulomb ゲージ、最後の矢印は楕円正則性と Rellich 型コンパクト性を使う。したがって、$|\Phi|$ の上界だけから滑らかな収束が出るのではなく、ゲージ固定と楕円評価を通って初めて部分列を取り出せる。

Donaldson 側の Uhlenbeck コンパクト化では点状のエネルギー集中を追加境界として記録した。SW 側では、固定した Spin^c 構造ではスピノル評価と可換曲率の制御が強く働くため、典型的には同じ種類のバブリング境界を加えずにコンパクト性を得る。この差が、SW 不変量が実用上計算しやすい理由の一つである。

継続例：K3 で一つの SW 経路を最後まで追う

K3 曲面の一つの具体的な作り方は、$\mathbb{CP}^3$ 内の滑らかな四次曲面

$$X = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] : F_4(z_0, z_1, z_2, z_3) = 0\}$$

として見ることである。これは複素 2 次元、実 4 次元の閉多様体である。随伴公式から

$$K_X = (K_{\mathbb{CP}^3} + [X])|_X = (-4H + 4H)|_X = 0$$

となる。標準事実として、K3 は単連結で $\chi = 24$、$\sigma = -16$ を持つ。従って $b_1 = 0$、$\chi = 2 + b_2$ から $b_2 = 22$ であり、$\sigma = b_2^+ - b_2^-$ と $b_2^+ + b_2^- = 22$ を解くと $b_2^+ = 3$、$b_2^- = 19$ である。

このため K3 曲面では $\chi = 24$、$\sigma = -16$、$b_1 = 0$、$b_2^+ = 3$ で、正準類は $K = 0$ である。ほとんど複素構造が与える正準 Spin^c 構造 $\mathfrak{s}_0$ は $c_1(\det W^+) = -K = 0$ を持つので

$$d(\mathfrak{s}_0) = \frac{0 - (2 \cdot 24 + 3(-16))}{4} = 0.$$

$b_2^+ = 3 > 1$ だから壁を避けられ、一般的な摂動で可約解を除いて 0 次元の向き付きモジュライ空間を得る。上の評価と調和 1 形式トーラスの処理によりこの空間はコンパクトであり、点の符号付き個数が計量と摂動に依らない整数になる。第 18 章で引用する Taubes の定理は、この整数が ± 1、特に非零であることを与える。従って K3 では

```
c1=0 → 期待次元 0 → 正則化 → コンパクト性
→ 符号付き個数 → Taubes により非零 → 曲面・連結和への制約
```

という一本の経路を追える。値の非零性は本章の解析だけからは出ず、シンプレクティック幾何という追加入力を使う。

可約を避ける条件

$\Phi = 0$ なら、方程式は $F_A^+ = i\eta$ になる。左辺のコホモロジー類は $2\pi i\, c_1(L)$ の自己双対調和成分と結びついている。したがって可約が存在する条件は、摂動 η と $c_1(L)^+$ が特定の関係を満たすこととして表れる。

$b_2^+ > 0$ なら、一般的な自己双対摂動でこの条件を避けられる。$b_2^+ = 1$ では避け方が部屋に依存し、壁越えが現れる。これは Donaldson 理論の壁と同じ構造を持つが、SW ではSpin^c 構造ごとの壁として見える。

不変量

$d(\mathfrak{s}) = 0$ で向きを選ぶと、正則モジュライの点を符号付きで数え

$$SW_X(\mathfrak{s}) \in \mathbb{Z}$$

を得る。$b_2^+ > 1$ では計量と一般的な摂動に依存しない。$b_2^+ = 1$ では部屋を指定する。正次元の場合はコホモロジー類を挿入する拡張が必要である。

次章では「SW は Donaldson より簡単」という言い方を分解する。コンパクト性と計算が簡潔になる面はあるが、非線形な連成、横断性、向き、壁越えは残る。

i 節内演習：Seiberg–Witten 期待次元

$K3$ 曲面では $\chi = 24$、$\sigma = -16$ である。$c_1(L) = 0$ の Spin^c 構造について、期待次元

$$d(\mathfrak{s}) = \frac{c_1(L)^2 - (2\chi + 3\sigma)}{4}$$

を計算せよ。

解答。 まず

$$2\chi + 3\sigma = 2 \cdot 24 + 3 \cdot (-16) = 48 - 48 = 0$$

であり、$c_1(L)^2 = 0$ だから

$$d(\mathfrak{s}) = \frac{0 - 0}{4} = 0.$$

正則性と向きを確保できれば、この構造の不変量は点の符号付き個数として定義される。

第 17 章　SW 不変量と Donaldson 理論の比較

同じ九段階を二度通す

Donaldson 理論と Seiberg–Witten 理論は、異なる方程式から同じ滑らかな 4 多様体へ不変量を返す。比較の単位は結論だけでなく、モジュライ構成の各段階である。

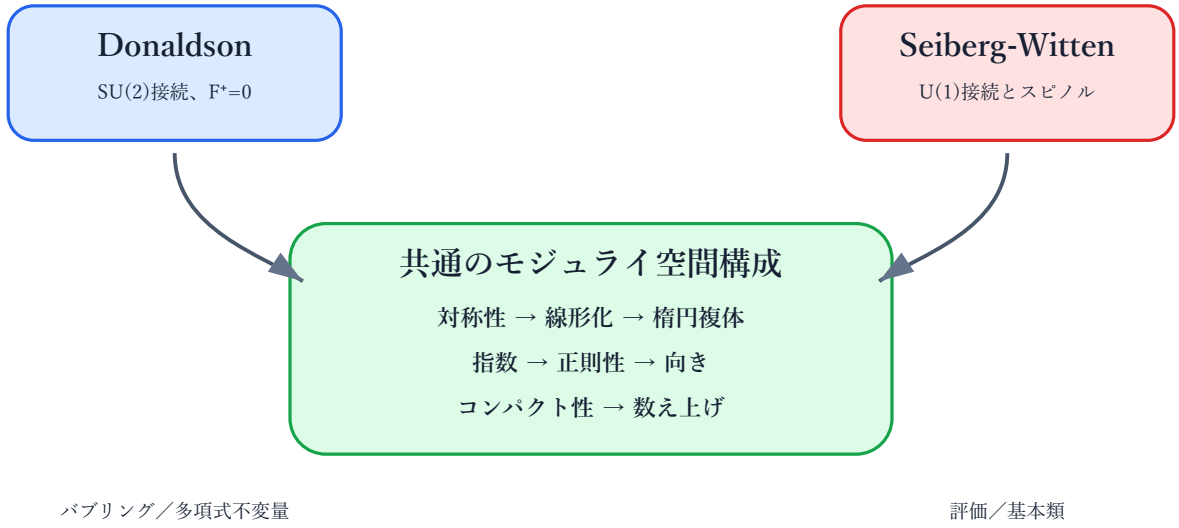


図 16: Donaldson 理論と Seiberg–Witten 理論が共有するモジュライ機械と、未知量・コンパクト性・出力の違い。

段階	Donaldson	Seiberg–Witten
未知量	非可換接続 A	$U(1)$ 接続 A とスピノル Φ
方程式	$F_A^+ = 0$	$D_A\Phi = 0,\ F_A^+ = q(\Phi) + i\eta$
非線形性	$A \wedge A$	A と Φ の連成、$q(\Phi)$
コンパクト性	バブリングを理想インスタントンで回収	Weitzenböck 評価と可換ゲージ固定

段階	Donaldson	Seiberg–Witten
出力	多項式・交点形式制約	Spin^c 構造ごとの整数

「可換だから簡単」の限界

$U(1)$ 曲率は $F_A = dA$ であり、接続単独なら線形である。しかし Dirac 作用素は A に依存し、曲率方程式は $q(\Phi)$ を含む。従って SW 方程式全体は非線形である。さらに可約、向き、壁越え、貼り合わせは消えない。

簡潔になるのは主にコンパクト性である。スピノルの四次項が先験的評価を与え、ASD 接続のような任意小尺度の非可換インスタントンを固定 $\mathfrak{s}$ 内で追跡する必要がない。この差が計算可能性を大きく変える。

何が同じで、何が違うか

二つの理論の差を「Donaldson は難しく、SW は簡単」とだけ言うと、肝心な構造を見失う。同じなのは、どちらも次を必要とすることである。

1. ゲージ対称性を割る。
2. 線形化を楕円 Fredholm 問題として扱う。
3. 一般的な補助データで正則性を得る。
4. 向きを選び、0 次元または正次元モジュライを数える。
5. 1 パラメータ モジュライで補助データへの依存を消す。

違うのは、コンパクト性の壊れ方と計算可能性である。Donaldson 理論では、非可換接続の尺度が 0 へ落ちるバブリングをコンパクト化に入れなければならない。SW 理論では、Weitzenböck 評価がスピノルを抑え、可換接続のゲージ固定と組み合わせてコンパクト性を得る。

つまり SW 理論はモジュライ機械を捨てた理論ではない。同じ機械の中で、最も重かったコンパクト性部分を別の解析構造で軽くした理論である。

比較は「難易度」ではなく「失敗の形」で見る

二つの理論を比較するとき、方程式の見た目だけを見ると誤解する。Donaldson 側では未知量は接続だけだが、構造群が非可換である。曲率には $A \wedge A$ が入り、尺度が縮むインスタントンが現れる。失敗の典型はバブリングであり、コンパクト化には失われた位相数を記録する層が必要になる。

SW 側では構造群は $U(1)$ で可換だが、スピノルが加わる。失敗の典型は「方程式が線形になる」ことではなく、可約、壁、向き、貼り合わせ、そして Spin^c 構造ごとの情報の読み替えである。Weitzenböck 評価によりコンパクト性は扱いやすくなるが、モジュライ問題の全てが自動で滑らかになるわけではない。

したがって、正しい比較は次のようになる。

問い	Donaldson 側	SW 側
コンパクト性の難所	非可換 バブリング	スピノル評価で大幅に制御
計算の入口	ASD モジュライと μ-挿入	Spin^c 構造と期待次元
消滅現象	連結和や正次元計算で繊細	連結和で SW 基本類が消えやすい
幾何への出力	多項式不変量、対角化制約	SW 基本類、随伴不等式、シンプレクティック制約

この表は優劣ではない。どの失敗をどう管理するかの違いである。

両不変量は常に同じか

Witten は物理的双対性から、単純型などの条件下で Donaldson 級数を SW 基本類から表す公式を予想した。[9] これは任意の 4 多様体について無条件に二つの不変量が同じ、という定理ではない。成立が証明されている範囲、仮定、正規化を区別する必要がある。

本書で厳密に使うのは、それぞれが微分同相不変量を与える枠組みと、特定の幾何で SW 不変量が非消滅するという結果である。両理論の完全な同値を前提にはしない。

単純型という言葉の位置

Donaldson 級数と SW 基本類を比較する公式では、しばしば単純型という仮定が現れる。これは Donaldson 不変量の高次成分が特定の形に整理される、という条件である。本書ではこの理論を完全展開しないが、重要なのは「SW 不変量が常に Donaldson 不変量を置き換える」という雑な主張をしないことである。

実用上は、SW 不変量は多くの幾何的問題で計算しやすく、SW 基本類の配置から強い結論を返す。一方、Donaldson 理論は歴史的にも論理的にも、滑らかな構造が交点形式だけでは見えないことを最初に示した深い機械である。二つは競合する要約ではなく、同じ 4 次元現象を異なる方程式で読む二つの窓である。

連結和と基本類

連結和で SW 不変量がどう振る舞うかは、理論の強さと盲点を同時に示す。ここでは使う版を明確にしておく。

> **i** 連結和消滅の標準形
>
> Y, Z を閉・連結・向き付きの滑らかな 4 次元多様体とし、$b_2^+(Y) > 0$ かつ $b_2^+(Z) > 0$ とする。$X = Y \# Z$ なら $b_2^+(X) > 1$ であり、通常の SW 不変量は任意の Spin^c 構造に対して 0 になる。この命題は両因子の正部分が非自明という仮定を必要とする。片方が負定値の場合や、$b_2^+ = 1$ の部屋付き不変量へはそのまま適用しない。[10]

従って、ある X に非零 SW 不変量があれば、X は両側が $b_2^+ > 0$ を持つ連結和には分解できない。この結論は「消えるから役に立たない」のではなく、消滅定理自体が幾何への情報を返すということである。たとえばシンプレクティック 4 多様体で Taubes により SW 不変量が非零になる場合、その非零性は連結和分解への制約を与える。

ただし、同じ消滅は識別能力の限界にもなる。二つの候補を連結和で加工した結果、もともと違っていた SW 基本類が消えてしまえば、SW 不変量では区別できない。第 14 章で述べたように、位相的に候補を作る操作と滑らかな不変量を保持する操作は別々に管理する必要がある。

K3 曲面でこの定理を使うと結論まで追える。K3 はシンプレクティックで $b_2^+ = 3$、第 18 章の Taubes の定理により $c_1 = 0$ の SW 不変量が非零である。もし

$$K3 \cong Y \# Z, \qquad b_2^+(Y) > 0, \quad b_2^+(Z) > 0$$

と分解できれば、連結和消滅定理は全 SW 不変量を 0 にするので矛盾する。従って K3 は、両側が正の b_2^+ を持つ非自明な連結和には分解できない。非零性という解析的出力が、具体的な分解不能性へ戻る例である。

SW 基本類をどう読むか

SW 不変量が非零になる Spin^c 構造の $c_1(L)$ を SW 基本類と呼ぶ。SW 基本類の集合は、単なる数のリストではなく、$H^2(X;\mathbb{Z})$ の中の配置である。微分同相写像はコホモロジーに作用するので、比較すべきなのは「同じ名前の類の値」ではなく、微分同相写像が誘導しうる格子同型の下で SW 基本類の配置が一致するかである。

この点は Donaldson 多項式でも同じである。不変量はホモロジー類の挿入に依存するため、二つの多様体を比較するときは、同相写像または候補となる格子同型がホモロジーをどう対応させるかを追跡する。値が一つ違う、というだけでなく、全ての許される対応の下で一致しないことを示して初めて微分同相でないことの証明になる。

幾何へ戻す

ここまで不変量は滑らかな構造を区別する観測量だった。最終章では向きを逆転し、非零の SW 不変量から埋め込み曲面の種数やシンプレクティック構造へ具体的制約を返す。解析的解が、もとの幾何にどの情報を強制するかを見る。

> **i** 節内演習：連結和と SW 不変量の消滅
>
> $X = Y \# Z$ で $b_2^+(Y) = b_2^+(Z) = 1$ とする。$b_2^+(X)$ を求め、標準的な連結和消滅定理の仮定の下で SW_X がどうなるか述べよ。
>
> **解答。** 交点形式は直交和になるので、正の固有値の個数も加法的である。したがって
>
> $$b_2^+(X) = b_2^+(Y) + b_2^+(Z) = 1 + 1 = 2.$$
>
> 両側が $b_2^+ > 0$ を持つ非自明な連結和なので、消滅定理により全ての Spin^c 構造について $SW_X = 0$ となる。単に $b_2^+(X) = 2$ だからではなく、正部分を持つ二つの成分への連結和分解が入力である。

Part VI　幾何への帰還

第 18 章　Kähler・シンプレクティック 4 次元多様体

90 度回転を各接空間へ置く

$\mathbb{R}^2$ の 90 度回転

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J^2 = -I$$

は、実平面を複素直線と見るための i 倍であった。実多様体 X の各接空間に滑らかに $J_x : T_xX \to T_xX$ を選び、$J_x^2 = -I$ を満たすとき、J を概複素構造という。これは各接空間を複素ベクトル空間にするが、複素座標が実際に貼り合わさるとは限らない。複素座標が存在するための追加条件が可積分性である。

(p,q) 型と $\bar\partial$

余接空間を複素化すると、J の固有値 $i, -i$ に従って

$$T^*X \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}$$

と分かれる。外積を取れば

$$\Lambda^k T^*X \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}$$

を得る。平面で $z = x + iy$ と書けば

$$dz = dx + i\,dy, \qquad d\bar z = dx - i\,dy,$$

で、関数 f に対して

$$df = \partial f + \bar\partial f, \qquad \bar\partial f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\bar z.$$

$\bar\partial f = 0$ は Cauchy–Riemann 方程式であり、f が正則であることを表す。一般の概複素多様体でも形式を型に射影できるが、$\bar\partial^2 = 0$ と正則座標を同時に使うには J の可積分性が必要である。

シンプレクティック形式、適合性、Kähler 構造

2 形式 ω が閉じていて $d\omega = 0$、かつ各点で非退化、すなわち $\omega(v, w) = 0$ が全ての w で成り立つなら $v = 0$、という条件を満たすとき、ω をシンプレクティック形式という。概複素構造 J が ω と適合するとは

$$\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w), \qquad g(v, w) = \omega(v, Jw)$$

で定まる g が正定値対称形式になることをいう。J が可積分で、ω が閉じ、両者が適合するとき (X, J, ω, g) は Kähler 多様体である。従って包含関係は

```
Kähler = 可積分な複素構造 + 閉じた適合 2 形式
シンプレクティック + 適合概複素構造 では、J は可積分とは限らない
```

となる。

$\mathbb{CP}^1$ と $\mathbb{CP}^2$ で用語を具体化する

$\mathbb{CP}^1$ のアフィン座標 z では Fubini–Study 形式を、正の定数倍を除いて

$$\omega_{FS} = \frac{i\, dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}$$

と書ける。これは閉じた正の $(1,1)$ 形式で、標準複素構造と合わせて $\mathbb{CP}^1$ を実次元 2 の Kähler 多様体にする。

$\mathbb{CP}^2$ では、次数 d の同次多項式 $P(z_0, z_1, z_2)$ は線束 $\mathcal{O}(d)$ の正則切断を定める。その零点集合

$$C = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^2 : P(z_0, z_1, z_2) = 0\}$$

は、勾配が同時に消えないなら滑らかな複素曲線である。正則切断の零点を重複度付きで記録したものが因子である。例えば $P = z_0$ は射影直線 $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2$ を与える。

概複素 4 次元多様体 (X, J) では、Riemann 面 (Σ, j) からの写像 u が

$$du \circ j = J \circ du$$

を満たすとき擬正則曲線という。J が可積分なら通常の正則曲線であるが、Taubes 理論では可積分性を仮定せず、この方程式を満たす曲線を用いる。ここまでで、正則切断、因子、擬正則曲線が SW 方程式の極限に現れる意味を準備できた。

$\mathcal{O}(1)$ と $\mathcal{O}(d)$ を貼り合わせで作る

$\mathcal{O}(d)$ を既知の名前として使わないため、まず $\mathbb{CP}^1$ で線束を作る。二つのチャート

$$U_0 = \{[z_0 : z_1] : z_0 \neq 0\}, \quad U_1 = \{[z_0 : z_1] : z_1 \neq 0\}$$

を取り、座標を $z = z_1/z_0$、$w = z_0/z_1 = 1/z$ とする。局所フレームを e_0, e_1 と書き、本書では $\mathcal{O}(1)$ を重なり $z \neq 0$ 上で

$$e_1 = z\, e_0$$

により貼り合わせた線束として扱う。これは繊維座標で書けば $s = s_0 e_0 = s_1 e_1$ なので $s_0 = z\, s_1$、すなわち $s_1 = z^{-1} s_0$ である。$\mathcal{O}(d)$ では

$$e_1 = z^d e_0$$

とし、同じ切断を表す局所関数は

$$s_1(w) = z^{-d} s_0(z)$$

を満たす。ここで逆べきが出るのは、遷移関数がフレームを貼り合わせる式であり、局所関数はその逆で変換するからである。

同次多項式との対応もこの式から出る。次数 d の同次多項式 $P(z_0, z_1)$ に対し、U_0 では

$$s_0(z) = P(1, z)$$

と書き、U_1 では

$$s_1(w) = P(w, 1)$$

と書く。$w = 1/z$ を代入すると

$$P(w, 1) = P(1/z, 1) = z^{-d} P(1, z)$$

であり、上の条件 $s_1 = z^{-d} s_0$ と一致する。例えば $d = 1$ で $P = z_0$ なら $s_0 = 1$、$s_1 = w$ なので零点は U_1 の $w = 0$、すなわち $[0 : 1]$ である。$P = z_1$ なら $s_0 = z$、$s_1 = 1$ なので零点は $[1 : 0]$ である。$d = 2$ の $P = z_0 z_1$ なら $s_0 = z$、$s_1 = w$ となり、二つの点に一回ずつ零点を持つ。

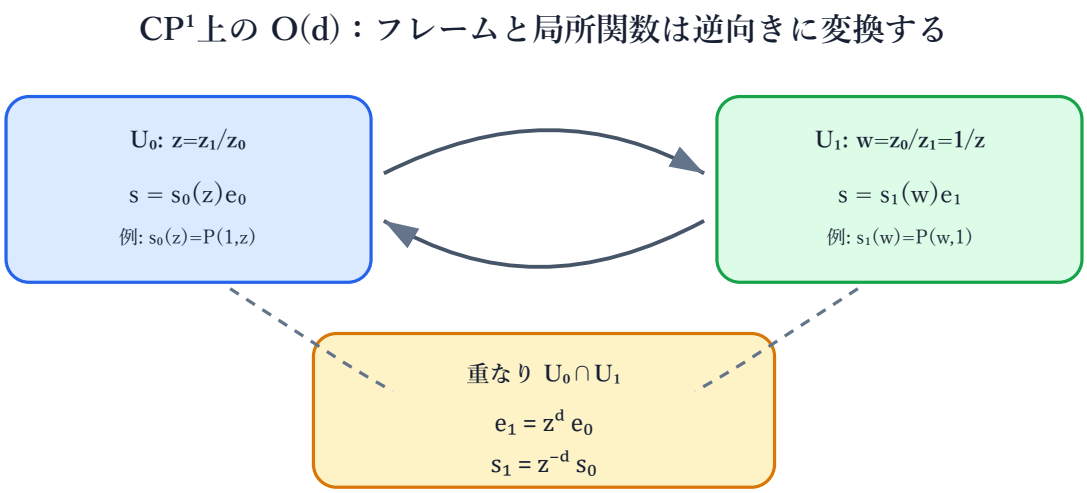


図 17: CP1 を二つのチャートで覆い、フレームが $e_1 = z^d e_0$、局所関数が $s_1 = z^{-d} s_0$ と逆向きに変換する。

$\mathbb{CP}^1$ では、零でない次数 d の同次多項式は重複度込みで d 個の零点を持つ。点のホモロジー類 $[\mathrm{pt}] \in H_0(\mathbb{CP}^1; \mathbb{Z})$ の Poincaré 双対を $u = \mathrm{PD}[\mathrm{pt}] \in H^2(\mathbb{CP}^1; \mathbb{Z})$ と書けば、

$$c_1(\mathcal{O}(d)) = d\, u$$

である。略して $d[\mathrm{pt}]$ と言うこともあるが、c_1 自体はコホモロジー類である。

ここで $\mathbb{CP}^1$ 上の $\mathcal{O}(1)$ と、次に出る $\mathbb{CP}^2$ 上の $\mathcal{O}(1)$ は、同じ空間上の同じ束ではない。共通しているのは「超平面線束」という構成である。一般に $\mathbb{CP}^n$ では、同次一次式の零点である超平面を 1 回切り出す線束を $\mathcal{O}(1)$ と呼ぶ。$\mathbb{CP}^1$ では超平面は点であり、$\mathbb{CP}^2$ では超平面は直線である。直線 $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2$ を取ると、$\mathbb{CP}^2$ 上の $\mathcal{O}(1)$ をこの直線へ制限したものが、上で貼り合わせた $\mathbb{CP}^1$ 上の $\mathcal{O}(1)$ になる。

$\mathbb{CP}^2$ では同じ考えにより、次数 d の滑らかな曲線は超平面類 H の d 倍

$$[C] = dH$$

を表す。従って、二つの次数 d, e の曲線は一般位置で de 点に交わる。これは $H^2 = 1$ から

$$(dH) \cdot (eH) = de$$

と計算する交点数と一致する。

Kähler 面では方程式が分解する

Kähler 面では正スピノル束が型分解を持ち、適切な Spin^c 構造で

$$W^+ \cong \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$$

と書ける。スピノルを (α, β) と表すと Dirac 方程式は $\bar\partial_A$ と $\bar\partial_A^*$ の組へ分かれ、曲率方程式も型 $(1,1)$ と $(0,2)$ の条件へ分解する。摂動の符号に応じて一方の成分が消え、残る方が正則切断として解釈される。

ただし、この表示は任意の Spin^c 構造にそのまま当てはまるわけではない。概複素構造から来る正準 Spin^c 構造では上の形になるが、線束 E でひねった構造では

$$W^+ \cong (\Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}) \otimes E$$

となる。行列式線束も $(K_J^{\text{line}})^{-1}$ から $(K_J^{\text{line}})^{-1} \otimes E^{\otimes 2}$ へ変わり、Chern 類では

$$c_1(\det W^+) = -K_X + 2c_1(E)$$

と書く。したがって「Kähler 面では $W^+ = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$」という短縮は、正準構造またはひねりを明記した文脈でだけ正しい。

この具体化により、抽象的なスピノル解と因子・線束の複素幾何が接続する。解析から得たモジュライが、既知の正則データで計算可能になる。

Kähler 還元の意味

Kähler 面で SW 方程式が扱いやすくなるのは、単に複素記法が使えるからではない。Dirac 作用素が

$$\sqrt{2}(\bar{\partial}_A + \bar{\partial}_A^*)$$

の形に分解し、曲率も型分解

$$F_A = F_A^{2,0} + F_A^{1,1} + F_A^{0,2}$$

を持つからである。摂動を Kähler form 方向に取ると、方程式はしばしば

$$\bar{\partial}_A \alpha = 0, \quad \beta = 0$$

またはその反対側へ還元される。するとスピノルの片方の成分は正則切断として読め、その零点集合が因子を作る。

ここで抽象的な PDE モジュライが、複素幾何の線形系や因子へ翻訳される。SW 理論が強力なのは、不変量が存在するだけでなく、特別な幾何では計算可能な対象へ降りるからである。

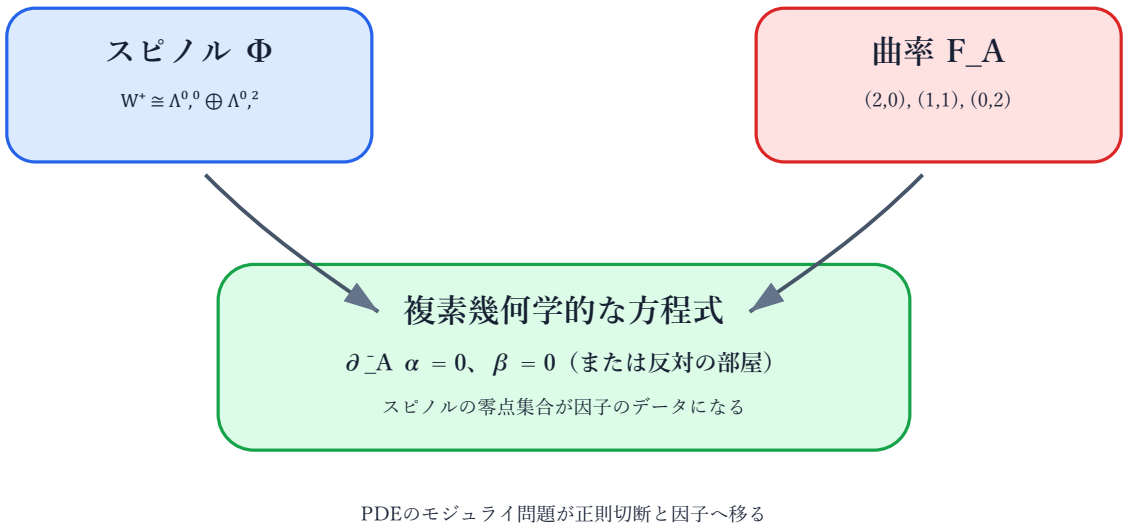


図 18: Kähler 面では、スピノルと曲率が型分解され、SW 方程式が正則切断や因子の条件へ翻訳される。

小さな計算例：複素曲線の随伴公式

代数曲面内の滑らかな複素曲線 C では、古典的な随伴公式として次が成り立つ。

$$2g(C) - 2 = C \cdot C + K_X \cdot C$$

ここでは K_X は線束そのものではなく、正準線束の第一 Chern 類を表すコホモロジー類である。線束を明示したいときは

$$K_X^{\mathrm{line}} = \Lambda^{2,0} T^*X, \qquad K_X = c_1(K_X^{\mathrm{line}}) \in H^2(X;\mathbb{Z})$$

と書き分ける。SW 理論の随伴不等式は、複素曲線に限らない滑らかに埋め込まれた曲面へ、これに似た下界を与える。複素曲線では等号が出る場合があり、SW 不変量による下界が既知の複素幾何の値と一致する。

例えば $\mathbb{CP}^2$ の次数 d の滑らかな複素曲線を考える。超平面類を H とすれば $[C] = dH$、$C \cdot C = d^2$ である。さらに Euler 列

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}(1)^{\oplus 3} \to T\mathbb{CP}^2 \to 0$$

を使う。これは $\mathbb{CP}^2$ 上の正則ベクトル束の完全列で、中央の三つの $\mathcal{O}(1)$ は同次座標 z_0, z_1, z_2 の三方向に対応し、右端の $T\mathbb{CP}^2$ は複素接束である。完全列

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

では全 Chern 類が $c(E) = c(E')c(E'')$ を満たす（Whitney 積公式）。ここで $c(\mathcal{O}) = 1$、$c(\mathcal{O}(1)) = 1 + H$ なので

左端の写像は、各点 $[z_0 : z_1 : z_2]$ でスカラー t を (tz_0, tz_1, tz_2) へ送るものと考えられる。これは同次座標を同時に拡大する方向で、射影空間では同じ点を表すため、接方向としては取り除かれる。商として残る部分が $T\mathbb{CP}^2$ である。列が正確であること自体は標準結果として引用するが、Chern 類計算には「中央から自明な拡大方向を割ると接束が残る」というこの型だけを使う。

$$c(T\mathbb{CP}^2) = c(\mathcal{O}(1)^{\oplus 3}) = (1+H)^3.$$

従って一次の部分を取ると $c_1(T\mathbb{CP}^2) = 3H$ が分かる。正準線束は最高次の正則余接束

$$K_{\mathbb{CP}^2}^{\mathrm{line}} = \Lambda^{2,0} T^*\mathbb{CP}^2$$

である。正準類を $K_{\mathbb{CP}^2} = c_1(K_{\mathbb{CP}^2}^{\mathrm{line}})$ と書くと、第一 Chern 類は接束のものに符号を反転して

$$K_{\mathbb{CP}^2} = c_1(K_{\mathbb{CP}^2}^{\mathrm{line}}) = -3H$$

である。従って

$$2g(C) - 2 = d^2 - 3d, \quad g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

低次数で読むと、直線 $d = 1$ と円錐曲線 $d = 2$ は $g = 0$、滑らかな三次曲線 $d = 3$ は $g = 1$、四次曲線 $d = 4$ は $g = 3$ になる。式だけでなく、曲線の次数、自己交点、正準類の三つが同時に種数を決めている点を見ておく。

この計算は SW 不変量を使ったものではない。しかし、随伴不等式を読む基準になる。ゲージ理論は、複素曲線で見慣れた種数制約を、より一般の滑らかな曲面へ拡張する役割を持つ。

Taubes の反転：解から曲線へ

閉シンプレクティック 4 次元多様体 (X, ω) は、適合する概複素構造 J を通じて正準線束と正準類

$$K_J^{\mathrm{line}} = \Lambda^{2,0} T^*X, \qquad K_X = c_1(K_J^{\mathrm{line}}) = -c_1(TX, J)$$

を持つ。J が定める正準 Spin^c 構造 $\mathfrak{s}_J$ では

$$W^+ = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}, \qquad \det W^+ = (K_J^{\mathrm{line}})^{-1}, \qquad c_1(\det W^+) = -K_X.$$

従って「正準 Spin^c 構造の第一 Chern 類」を K_X と呼ぶのは符号誤りである。共役 Spin^c 構造は $c_1 = K_X$ を持ち、$b_2^+ > 1$ では共役対称性により $\pm K_X$ の両方を基本類として扱うことが多い。Taubes の $SW \Rightarrow Gr$ は、適切な SW 解の大摂動極限から擬正則曲線を取り出し、SW 不変量と Gromov 不変量を結ぶ。[11]

i 引用定理｜Taubes の定理（深度 D）

$b_2^+(X) > 1$ の閉・連結シンプレクティック 4 次元多様体 (X, ω) では、J が定める正準 Spin^c 構造 $\mathfrak{s}_J$、すなわち $c_1(\det W^+) = -K_X$ の構造に対する SW 不変量は ± 1 である。共役構造は $c_1 = K_X$ を持ち、その不変量も符号を除いて非零である。より一般に、非零 SW 不変量を持つ類から、適切な大摂動極限を通じてシンプレクティック面積が正の擬正則曲線データが得られる。$b_2^+ = 1$ ではシンプレクティック形式が選ぶ Taubes の部屋を指定する必要がある。本書では主に $b_2^+ > 1$ の版を使い、解析的極限の完全証明は引用する。

証明アーキテクチャ：SW 解から曲線を取り出す

Taubes の証明を引用定理として使う場合でも、何が起きているかの輪郭は必要である。大きな摂動パラメータ r を入れた SW 方程式を考えると、スピノルの一成分は多くの場所で大きくなり、その零点近くに曲率が集中する。零点集合を適切に拡大して見ると、概複素構造に対する擬正則曲線が現れる。

論理の骨格は次のように読める。

1. $c_1(\det W^+) = -K_X$ の正準 Spin^c 構造に対して、大摂動 SW 方程式を置く。
2. Weitzenböck 型評価でスピノルの大きさと曲率集中を制御する。
3. スピノルの零点集合に沿ってエネルギーが集中することを示す。
4. 極限として擬正則曲線、またはカレントを得る。
5. コンパクト性と擬正則曲線の交点正値性により、Gromov 不変量と SW 不変量を対応させる。

ここでいうカレントとは、滑らかな曲線そのものではなく、微分形式を積分して数を返す一般化された曲線である。例えば滑らかな曲線 C は 2 形式 η に対して

$$\eta \mapsto \int_C \eta$$

という線形汎関数を定める。曲線列がしわを作ったり重複度を持って極限へ向かったりすると、集合としてはきれいに収束しなくても、この「形式を積分する作用」は極限を持つことがある。その極限をカレントとして扱う。Taubes の解析では、まずこの弱い意味で極限を得て、さらに正則性と単調性を使って擬正則曲線として読める構造を取り出す。

難所は、零点集合がただの測度論的な集合ではなく、擬正則曲線として十分な構造を持つことを示す点である。本書ではこの解析を証明しないが、Taubes の結果が「SW 非零なら曲線がある」という幾何的出力を返すことを明示して使う。

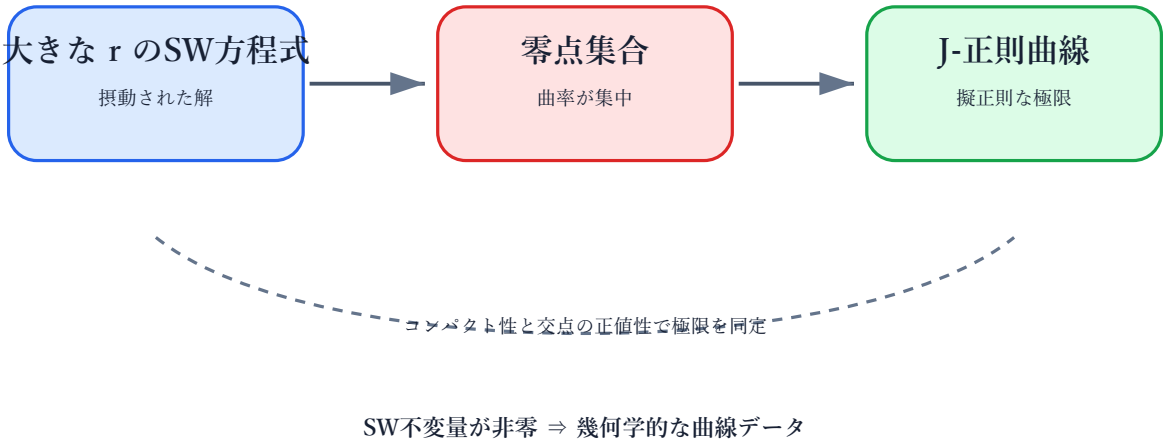


図 19: Taubes の大摂動極限では、閉シンプレクティック 4 多様体と適切な Spin^c 構造・摂動の下で、SW 解のスピノル零点近くに曲率が集中し、極限として重複度付きの擬正則曲線またはカレントが現れる。

図の矢印は任意の 4 多様体に対する無条件の命題ではない。閉シンプレクティック 4 多様体、適切な Spin^c 構造、部屋や摂動の指定、大摂動極限という Taubes 理論の文脈で読む。

随伴不等式

$SW_X(\mathfrak{s}) \neq 0$ とし、対応する基本類を $k = c_1(L)$ とする。本書で使う版を固定する。X を閉・連結・向き付きの滑らかな 4 次元多様体で $b_2^+(X) > 1$ とし、$\Sigma \subset X$ を滑らかに埋め込まれた連結閉曲面とする。さらに $[\Sigma]$ は非ねじれ、$g(\Sigma) > 0$、$\Sigma \cdot \Sigma \geq 0$ と仮定する。このとき

$$2g(\Sigma) - 2 \geq \Sigma \cdot \Sigma + |k \cdot [\Sigma]|$$

という随伴不等式が成り立つ。自己交点が負の場合、球面の場合、$[\Sigma]$ がねじれの場合はこの命題の適用外であり、別の版を無断で代用しない。左辺は種数、右辺はホモロジー類と基本類だけで書かれるため、同じホモロジー類を表す滑らかな曲面の最小種数に下界を与える。[10], [12]

入力は非零 SW 不変量であり、不等式そのものが基本類の存在を作るわけではない。また $b_2^+ = 1$ では部屋を指定した別の命題が必要になる。

継続例：K3 で定理から幾何へ戻る

K3 曲面は $K_X = 0$、$b_2^+ = 3$ の閉シンプレクティック 4 次元多様体である。第 16 章で見た $c_1 = 0$ の正準 Spin^c 構造は期待次元 0 を持ち、Taubes の定理により SW 不変量が ± 1 である。従って $k = 0$ は基本類である。

自己交点 $2n \geq 0$ の非ねじれ類を、種数 $g > 0$ の連結な滑らかな埋め込み曲面 Σ が表すなら、随伴不等式は

$$2g - 2 \geq 2n + |0 \cdot [\Sigma]| = 2n, \qquad g \geq n + 1$$

を与える。一方、その類が正則曲線で表される場合、$K_X = 0$ の随伴公式は $2g - 2 = \Sigma^2 = 2n$ を与え、下界は等号になる。ここでは

```
K3 の正準 Spin^c 構造 → SW≠0 → 基本類 0
→ 随伴不等式 → 最小種数の下界 → 正則曲線で達成
```

という具体経路が閉じている。

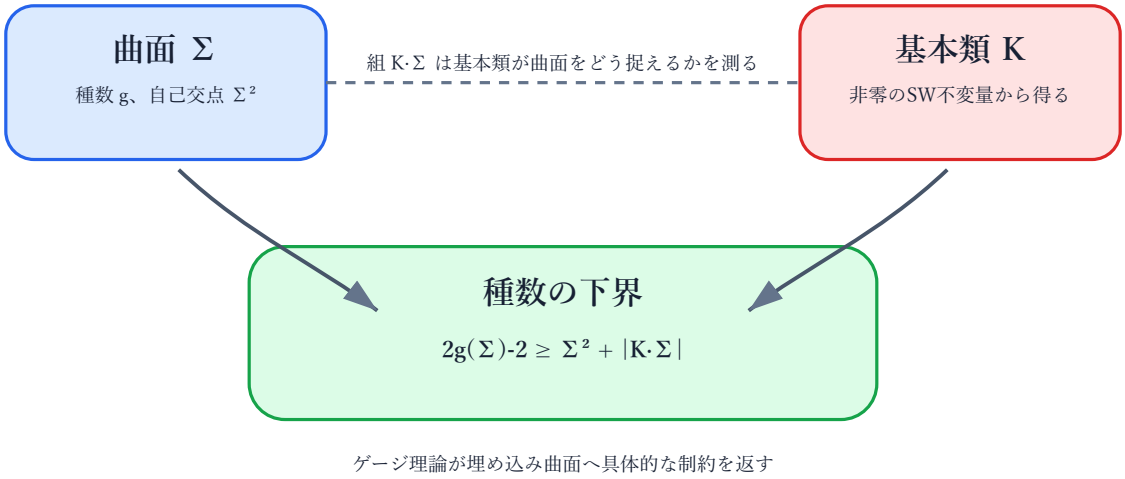


図 20: 随伴不等式は、曲面の種数、自己交点、SW 基本類とのペアリングを一つの下界として結びつける。

複素曲線では随伴公式が等号を与える場合があり、解析的不変量の下界が代数幾何の値と一致する。ここでゲージ理論は滑らかな構造の識別器から、埋め込み問題の定量的道具へ変わる。

随伴不等式の読み方

この不等式は、曲面の種数をホモロジー類だけから完全に決めるものではない。しかし、ある類を低い種数で表せるかどうかに強い制約を与える。例えば $\Sigma\cdot\Sigma$ が大きく、SW 基本類とのペアリングも大きければ、右辺が大きくなり、低種数代表は排除される。

Donaldson 理論が交点形式の整数格子へ制約を返したのに対し、SW 理論は SW 基本類を通じて埋め込み曲面の最小種数へ制約を返す。この違いが、後期 4 次元トポロジーで SW 理論が急速に使われた理由の一つである。

正のスカラー曲率への障害

X を閉・向き付きで $b_2^+(X) > 1$ とし、ある Spin^c 構造の SW 不変量が非零とする。もし正のスカラー曲率を持つ計量が存在すれば、小さい一般的摂動に対する Weitzenböck 評価は既約解を排除する。$b_2^+ > 1$ では不変量は計量と一般的摂動に依らないので、非零性と矛盾する。従ってこの仮定の下で X は正のスカラー曲率を持つ計量を許さない。$b_2^+ = 1$ では部屋依存があるため、この文をそのまま適用しない。

中心問題への回答

楕円型ゲージ方程式の解空間が滑らかな構造を検出できる理由は、一つの奇跡ではなく連鎖である。

1. 4 次元では曲率 2 形式が自己双対に分かれ、位相数がエネルギー下限になる。
2. ゲージ対称性を含む線形化が楕円複体を作り、指数が有限次元の期待次元を与える。
3. 正則性、向き、コンパクト化を加えると、解空間から変形不変な数を取れる。
4. 構成は接続、Dirac 作用素、摂動、向きなどの滑らかなデータに依存する。微分同相写像ではこれらを引き戻せるため不変量が保存される。一方、同相写像だけで保存されるとは限らず、実際に同相だが SW 不変量や Donaldson 不変量で区別される例が存在する。
5. 非零・消滅・SW 基本類の配置が、交点形式、滑らかな構造、曲面、シンプレクティック幾何へ制約を返す。

Freedman と Donaldson の衝突から始まった問いは、Taubes によって再び幾何へ戻った。4 次元ゲージ理論は、位相と解析の間に補助構造を置く理論ではない。両者が同じ次数で出会う 4 次元において、解析的コンパクト性の壊れ方まで含めて位相情報へ翻訳する機械である。

i 節内演習：随伴不等式から種数を読む

SW 基本類 K を持つ 4 多様体に、自己交点 $[\Sigma]^2 = 6$、$|K \cdot [\Sigma]| = 2$ の連結な埋め込み曲面 Σ があるとする。随伴不等式

$$2g(\Sigma) - 2 \geq [\Sigma]^2 + |K \cdot [\Sigma]|$$

から種数の下限を求めよ。

解答。 右辺は $6 + 2 = 8$ なので

$$2g(\Sigma) - 2 \geq 8 \quad \Rightarrow \quad 2g(\Sigma) \geq 10 \quad \Rightarrow \quad g(\Sigma) \geq 5.$$

したがって、このホモロジー類を種数 4 以下の滑らかな曲面で表すことはできない。

付録 A　解析の道具箱

Sobolev 指数の選び方

最初に、区間 $[0,1]$ 上の関数で Sobolev 空間を手で見る。$L^2([0,1])$ は

$$\| f \|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

を満たす関数を、ほとんど至る所等しいもの同士で同一視した空間である。$H^1([0,1])$ は f と弱微分 f' がともに L^2 に入る関数の空間で、ノルムは

$$\| f \|_{H^1}^2 = \int_0^1 |f|^2 \, dx + \int_0^1 |f'|^2 \, dx$$

で測る。弱微分とは、古典的な微分が存在しない点があっても、部分積分の式

$$\int_0^1 f \, \varphi' \, dx = - \int_0^1 g \, \varphi \, dx$$

を全てのコンパクト台を持つ滑らかな試験関数 φ について満たす g を f' と呼ぶ、という意味である。完備化とは、滑らかな関数列の極限として現れるこのような関数も解析の対象に含める操作である。

強収束と弱収束も区別しておく。$f_n \to f$ が L^2 強収束するとは $\| f_n - f \|_{L^2} \to 0$ である。一方、弱収束は全ての $h \in L^2$ に対し

$$\int_0^1 f_n h \, dx \to \int_0^1 f h \, dx$$

が成り立つことをいう。例えば $f_n(x) = \sin(2\pi n x)$ は L^2 ノルムが一定で 0 へ強収束しないが、振動が打ち消し合うため弱く 0 へ収束する。Rellich 型のコンパクト性は、微分まで一様に抑えた列では、このような高周波振動を低いノルムで抑えられる、という形で働く。1 次元では H^1 有界列から C^0 ではなく少なくとも L^2 強収束する部分列を取れる。4 次元ゲージ理論の Rellich 補題は、この現象の高次元・束値版である。

4 次元で接続のゲージ作用を Banach Lie 群作用として扱うには、通常 $k > 2$ を選び $L^2_k \hookrightarrow C^0$ を使う。積写像が連続になる範囲を確認し、$\mathcal{A}_k = A_0 + L^2_k \Omega^1$ と $\mathcal{G}_{k+1} = L^2_{k+1}(X, G)$ を組み合わせる。微分で一階失うため、ゲージ群側を一階高く取る。

なぜ $k > 2$ が自然かを、4 次元の Sobolev 埋め込みで見る。一般に L^2_k は $k - 2 > 0$ のとき連続関数へ埋め込まれる。ゲージ変換 g を接続へ作用させる式

$$g(A) = g^{-1} A g + g^{-1} dg$$

では、g 自身の積、逆元、微分、そして A との積が同時に出る。$g \in L^2_{k+1}$、$A - A_0 \in L^2_k$ としておくと、$dg \in L^2_k$ で接続の Sobolev 次数と揃う。これは「群を一階高く取る」という慣習の理由である。

Sobolev 乗法で何を制御するか

ASD 方程式を $A + a$ で展開すると

$$F^+_{A+a} = F^+_A + d^+_A a + (a \wedge a)^+$$

となる。Banach 空間で陰関数定理を使うには、写像

$$a \mapsto d^+_A a + (a \wedge a)^+$$

が必要な回数だけ微分可能でなければならない。ここで問題になるのは二次項である。4 次元で $k > 2$ とすると、L^2_k は代数になり、概略

$$\| uv \|_{L^2_k} \leq C \| u \|_{L^2_k} \| v \|_{L^2_k}$$

の形の評価が使える。接続の曲率では一階微分が出るため、実際には対象ごとに $L^2_k \to L^2_{k-1}$ の写像として評価する。本文で「Sobolev 乗法で非線形項を制御する」と言うとき、少なくともこの積写像の連続性と滑らかさを含んでいる。

Coulomb ゲージの楕円系

局所スライスで $d^*_A a = 0$ を課すと、ASD 方程式は

$$d^+_A a = -(a \wedge a)^+$$

と組み合わさり、

$$D_A a = (d^*_A a, d^+_A a)$$

という楕円作用素が主部になる。楕円評価は局所的に

$$\| a \|_{L^2_k(U')} \leq C \left(\| D_A a \|_{L^2_{k-1}(U)} + \| a \|_{L^2(U)} \right)$$

という形を持つ。$U' \Subset U$ とするのは、カットオフ関数を使う内部評価で境界効果を避けるためである。閉多様体全体では有限個の局所座標近傍と 1 の分割で貼り合わせる。

この評価の読み方は単純である。$D_A a$ が一階微分を制御し、残った有限次元核方向だけが $\| a \|_{L^2}$ として残る。したがって、方程式を満たす列に一様上界があれば、高い Sobolev ノルムの制御へ進める。

三つのコンパクト性を区別する

- Rellich コンパクト性: 有界な Sobolev 列から低い次数で強収束する部分列を取る。
- 楕円型コンパクト性: 方程式とゲージ条件から高階評価を得て収束を改善する。
- Uhlenbeck コンパクト性: 曲率集中点を除き、列ごとに異なるゲージを選んで収束させる。

三つ目は最初の二つに小エネルギー・ゲージ定理とエネルギー量子化を加えた非線形な結論である。

Fredholm 作用素の実用的な判定

閉多様体上の楕円作用素

$$D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$$

を Sobolev 空間

$$D : L^2_k(E) \to L^2_{k-r}(F)$$

として見ると、D は Fredholm 作用素になる。ここで r は作用素の階数である。Fredholm 性とは、核と余核が有限次元で、像が閉であることをいう。

Donaldson 理論で重要なのは、Fredholm 指数

$$\operatorname{ind}\ D = \dim \ker D - \dim \operatorname{coker}\ D$$

が摂動で安定であることだ。計量や接続を連続的に動かしても、楕円性が失われない限り指数は変わらない。この安定性により、解析的に定義された差が特性類で計算される位相量へ変換される。Atiyah–Singer 指数定理はこの最後の変換を与える。[13]

陰関数定理の入力

非線形写像 $F : E \to Y$ の零点集合を調べるとき、DF_0 が全射で分裂する核を持てば、零点集合は局所的に $\ker DF_0$ を接空間とする Banach 部分多様体になる。全射でないときは余核へ射影した有限次元 Kuranishi 写像が残る。

有限次元の陰関数定理と違い、Banach 空間では核が補空間を持つことを明示する必要がある。楕円 Fredholm 作用素では核が有限次元なので、閉補空間を取れる。全射性がない場合、余核も有限次元なので、方程式を「解ける無限次元方向」と「残る有限次元障害方向」へ分けられる。これが Kuranishi 模型の解析的な背景である。

Sard–Smale の役割

パラメータを含む普遍方程式が横断的なら、パラメータ空間への射影の正則値に対して個々のモジュライが正則になる。結論を使う前に、写像の Fredholm 性、必要な微分可能性、可分性、可約の除外を確認する。

通常の Sard の定理は有限次元の滑らかな写像に対し、臨界値の集合が小さいことを述べる。モジュライ問題では、計量空間や摂動空間が無限次元なので、そのままでは使えない。Sard–Smale の定理は、Fredholm 写像に対して正則値が残留集合をなす、という形でこの役割を担う。[14]

ここで残留集合とは、可算個の開稠密集合の共通部分である。測度の概念ではなく、Baire カテゴリーの意味で「一般的」と言っている。本文で一般的な計量を使うたびに、実際には次を確認している。

1. 普遍モジュライが Banach 多様体として定義できる。
2. 普遍切断が横断的である。
3. パラメータ空間への射影が Fredholm である。
4. 可約やコンパクト性の破綻が別に制御されている。

行列式線束と向き

0 次元モジュライを符号付きで数えるには、各点に $+1$ または -1 を付けなければならない。この符号は、有限次元多様体なら接空間の向きから来る。ASD モジュライでは接空間が直接与えられるのではなく、Fredholm 作用素

$$D_A = d_A^{*} \oplus d_A^{+}$$

の核と余核から局所模型を作る。そこで向きは行列式線束

$$\det D_A = \Lambda^{\max} \ker D_A \otimes (\Lambda^{\max}\ \operatorname{coker}\ D_A)^{*}$$

の向きとして定義される。正則な既約解では余核が消え、$\ker D_A$ がモジュライの接空間になるので、この定義は通常の向きと一致する。

なぜ行列式線束を使うのか。モジュライ全体で A を動かすと、核と余核の次元は特異点近くで跳ぶことがある。しかし Fredholm 族の行列式線束は、適切に扱えば連続な線束として振る舞う。したがって、向き問題は「各点で接空間に向きを付ける」問題ではなく、「Fredholm 族の行列式線束を向き付ける」問題として定式化される。

Donaldson 理論では、単連結などの仮定のもとでホモロジー向きを選ぶと、ASD モジュライの向きが誘導される。本文で「向きを選んで符号付き数え上げを取る」と言うとき、背後ではこの行列式線束の向き付けが行われている。

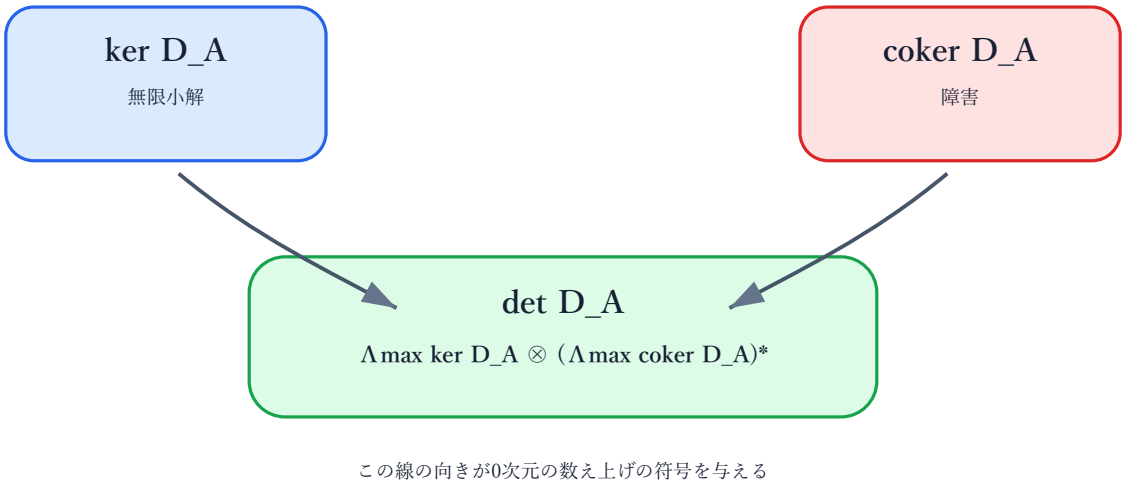


図 21: Fredholm 作用素の核と余核から行列式線束が作られ、その向きが 0 次元モジュライの符号付き数え上げを支える。

貼り合わせは何を逆にする操作か

コンパクト化でバブルや壊れた配置が現れると、モジュライの境界や端を理解する必要がある。貼り合わせは、その境界データから実際の近似解を作り、さらに真の解へ補正する操作である。

典型的な流れは次の通りである。

1. 既知の解 A_0 と、標準的なバブル解 I_ρ を用意する。
2. 切断関数で二つを貼り合わせ、近似解 A_{app} を作る。
3. 誤差 $F^+_{A_{\mathrm{app}}}$ を評価する。
4. 線形化作用素の右逆を使い、補正項 a を解く。
5. 縮小写像定理または陰関数定理で真の解 $A_{\mathrm{app}} + a$ を得る。

この手順は「絵として貼る」だけではない。誤差が十分小さいこと、右逆の作用素ノルムが制御されること、障害がないか有限次元方程式として管理されることが必要である。貼り合わせ定理は、コンパクト化の端が本当にモジュライの端として現れることを保証する役割を持つ。

Donaldson 対角化定理や多項式不変量の深い証明で貼り合わせが必要になるのは、境界層を数え上げや交点計算と結びつけるためである。本書では貼り合わせ解析を完全証明しないが、端の構造を使う主張では、常に「近似解から真の解へ戻す解析」が背後にある。

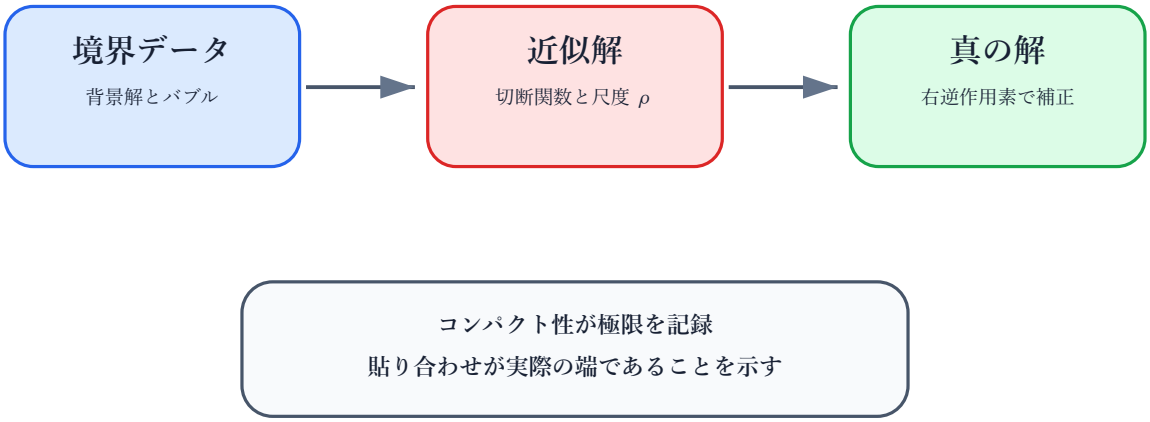


図 22: コンパクト化は逃げた列の極限を記録し、貼り合わせはその境界データの近くに実際の解があることを戻す。

SW 接続のゲージ固定と調和成分

本文では A を $L = \det W^+$ の接続とする。このとき $u : X \to S^1$ の作用とその無限小作用は

$$(A, \Phi) \mapsto (A - 2u^{-1}du, u\Phi), \qquad f \mapsto (-2df, f\Phi)$$

である。係数 2 は u がスピノルに重み 1、行列式に重み 2 で作用することから来る。接続変数を半分に正規化する文献の係数 1 と混ぜない。

基準接続 A_0 に対して $A = A_0 + \alpha$ と書き、$d^*\alpha = 0$ を課す。作用素

$$d^* \oplus d^+ : \Omega^1(i\mathbb{R}) \to \Omega^0(i\mathbb{R}) \oplus \Omega^2_+(i\mathbb{R})$$

の楕円評価は、α の調和 1 形式成分を除く部分を制御する。固定された $c_1(L)$ は曲率 F_A の de Rham コホモロジー類を固定するが、接続差 α の調和 1 形式成分までは固定しない。この成分をゲージ変換で割ると

$$H^1(X; \mathbb{R})/H^1(X; \mathbb{Z})$$

型のコンパクトなトーラスになる。格子に付く 2π や 2 の係数は接続規約に依存する。したがって SW コンパクト性では、調和成分が消えると仮定するのではなく、このトーラスの基本領域から代表を選ぶ。

Weitzenböck 公式の二つの使い方

行列式接続の規約では

$$D_A^* D_A = \nabla_A^* \nabla_A + \frac{s}{4} + \frac{1}{2}\rho(F_A^+).$$

$D_A\Phi = 0$ と Φ の内積を閉多様体上で積分すると、部分積分により $\| \nabla_A \Phi \|_{L^2}^2$ が現れる。これは積分恒等式である。一方、最大値原理では

$$\langle \nabla_A^* \nabla_A \Phi, \Phi \rangle$$

を $|\Phi|^2$ のラプラシアンと $|\nabla_A\Phi|^2$ に分解し、$|\Phi|^2$ の最大点で点ごとの不等式を使う。$\langle \nabla_A^* \nabla_A \Phi, \Phi \rangle = |\nabla_A \Phi|^2$ は点ごとには成り立たない。本文第 16 章の L^2 評価と L^∞ 評価は、この二つを別々に用いている。

特性類の最小整理

本文では $c_2(P)$、$p_1(\mathrm{ad}\ P)$、w_2、$c_1(L)$ が現れる。ここで役割だけを整理する。

記号	使う場所	役割
$c_2(P)$	$SU(2)$ Donaldson 理論	位相数や ASD モジュライの指数に入る
$p_1(\mathrm{ad}\ P)$	$SO(3)$ 束	指数公式や Donaldson 不変量の型を決める
$w_2(TX)$	Spin / Spin^c の存在条件	spin 構造の障害、Spin^{c}合同条件の右辺
$c_1(L)$	SW 理論	Spin^c 構造の行列式線束、期待次元、SW 基本類

重要なのは、これらが単なるラベルではなく、モジュライ問題の入力を固定することである。Donaldson 側では束の特性類が ASD モジュライの位相数と次元を決める。SW 側では Spin^c 構造、特に行列式線束の $c_1(L)$ が方程式の添字になる。

例えば SW 期待次元

$$d(\mathfrak{s}) = \frac{c_1(L)^2 - (2\chi + 3\sigma)}{4}$$

では、$c_1(L)^2$ は交点形式で計算する。ここで第 2 章の交点形式と、第 15–16 章の Spin^c 構造がつながる。

Spin^c 構造の実用チェック

Spin^c 構造を使うとき、本文では次を確認する。

1. 行列式線束 L の $c_1(L)$ が

$$c_1(L) \equiv w_2(TX) \pmod 2$$

   を満たす。
2. $c_1(L)^2$ を交点形式で計算する。
3. $d(\mathfrak{s})$ が 0 か正か負かを確認する。
4. 可約や壁越えが問題になるかを b_2^+ と摂動で確認する。
5. 非零不変量が得られた場合、その $c_1(L)$ を SW 基本類として幾何的制約へ使う。

このチェックリストにより、SW 理論の記号を「スピノルが出てくる別理論」としてではなく、Donaldson 理論と同じモジュライのライフサイクルの別入力として読める。

読者のための最小チェックリスト

解析の道具を使う箇所で、次の問いに答えられれば本文の論理を追える。

問い	見るべき場所
なぜ Banach 空間で扱えるか	Sobolev 完備化と乗法評価
なぜ有限次元になるか	楕円性、Fredholm 性、Rellich コンパクト性
なぜ弱解が滑らかか	Coulomb ゲージ、楕円正則性、bootstrapping
なぜ一般的に滑らかか	普遍モジュライ、Sard–Smale
なぜ数え上げが不変か	コンパクト化、向き、cobordism

この付録は完全な関数解析の教科書ではない。しかし本文で引用定理として借りる解析結果が、どの仮定からどの結論を返しているかを追跡するための地図である。

付録 B　記号・用語・演習と解答

記号と規約

記号	意味
X	閉・連結・向き付きの滑らかな 4 多様体
$P \to X$	主 $SU(2)$ または $SO(3)$ 束
A, F_A	接続とその曲率
$\mathcal{G}$	指定したソボレフ階数のゲージ群
$\mathcal{M}_k$	位相数 k の反自己双対接続のモジュライ空間
H^i_A	反自己双対変形複体のコホモロジー
b_2^+	交点形式の正指数
$\mathfrak{s}$	Spin^c 構造
$W^{\pm}, L$	スピノル束と行列式線束

本書では $F_A^+ = 0$ を ASD と呼び、$\mathrm{YM}(A) = \| F_A \|_{L^2}^2$ とする。向き反転では Λ^2_+ と Λ^2_- が交換される。

用語対照

英語は文献検索に必要な初出だけで併記し、本文では日本語を基本とする。

本文で使う語	文献でよく見る英語	区別すべき語
滑らかな構造	smooth structure	位相構造、単なる座標表示
交点形式	intersection form	交点数、交点行列
切断	section	節、断面図
接続、曲率	connection, curvature	接続形式という局所表示
ゲージ変換	gauge transformation	物理的状態の変化ではなく表示の重複
モジュライ空間	moduli space	方程式の解集合そのもの
期待次元	expected/virtual dimension	実際の局所次元
コンパクト化	compactification	コンパクト性そのもの
基本類 $[X]$	fundamental class	SW 基本類
SW 基本類	Seiberg–Witten basic class	多様体の基本類 $[X]$

基礎演習

位相・多様体・ホモロジー

1. 実数直線上で $(0,1)$ が開集合であることを、各点のまわりの小区間を用いて確認せよ。$[0,1]$ が開集合でない理由も述べよ。
2. 円周から一点を除くと実数直線と同相になる写像を一つ書け。円周全体が実数直線と同相でないことは、コンパクト性から説明せよ。
3. 円周を三つの辺で近似し、各頂点の境界が辺の境界で相殺されることから、閉路の境界が 0 になることを確かめよ。
4. トーラス上の経線と緯線が、互いの整数倍ではない二つの 1 次元ホモロジー類を与える理由を説明せよ。

5. $S^2 \times S^2$ の二つの曲面 $S^2 \times \{p\}$ と $\{q\} \times S^2$ の交点を数え、向きを整合的に選べば交点数が $+1$ になることを局所座標で確認せよ。

束・接続・曲率

6. メビウスの帯を区間上の実直線の族として表し、一周後にベクトルの符号が反転する貼り合わせを書け。円筒との違いを説明せよ。
7. 平面で $e_1(t) = (\cos t, \sin t)$、$e_2(t) = (-\sin t, \cos t)$ と置く。一定成分 $(1,0)$ をもつ切断 $s(t) = e_1(t)$ の通常微分を計算し、基底成分が一定でもベクトルが変化することを示せ。
8. $U(1)$ 接続 $A = i a(x)\,dx$ に沿う平行切断 s が $s' + i a(x) s = 0$ を満たすとする。解を積分で書き、閉曲線で得られる位相因子が $\exp(-i \oint a\,dx)$ になることを示せ。
9. 行列値 1 形式では $A \wedge A$ が消えないことを、交換しない二つの 2×2 行列 B, C と $A = B\,dx + C\,dy$ を使って確かめよ。

解析・モジュライ空間

10. 写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$、$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ の零点集合を求め、各点で微分が全射になることを確かめよ。次に $g(x,y) = x^2 + y^2$ の零点で何が壊れるかを述べよ。
11. 行列 $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の核・像・余核を求め、$\dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T$ を計算せよ。
12. 円周が平面の回転群で一点の軌道になる例と、原点だけ固定部分群が大きくなる例を比較し、商空間の特異点が安定化部分群と関係することを説明せよ。

基礎演習の解答

1. $x \in (0,1)$ に対し $\varepsilon < \min\{x, 1-x\}$ を取れば $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (0,1)$ である。$0 \in [0,1]$ のどの開区間も負の数を含むため、$[0,1]$ は開でない。
2. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ を (x,y) で表し、北極 $N = (0,1)$ を除く。北極からの立体射影

$$\sigma : S^1 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(x,y) = \frac{x}{1-y}$$

   は同相写像である。逆写像は

$$t \mapsto \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right)$$

   で、直接代入すれば $\sigma(\sigma^{-1}(t)) = t$ と $\sigma^{-1}(\sigma(x,y)) = (x,y)$ が確認できる。両方とも分母が 0 にならない範囲で連続なので同相である。一方、円周全体はコンパクトだが実数直線はコンパクトでなく、同相写像はコンパクト性を保存する。
3. 向き付けた辺を $[v_0 v_1] + [v_1 v_2] + [v_2 v_0]$ とすると、境界は $(v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + (v_0 - v_2) = 0$ である。
4. それぞれを横切る閉曲線との交点数を取ると、一方に対して $(1,0)$、他方に対して $(0,1)$ を与え、整数倍では一致しない。
5. 交点は (q,p) の一点である。q の近くで第一因子 S^2 の正向き局所座標を (u_1, u_2)、p の近くで第二因子 S^2 の正向き局所座標を (v_1, v_2) と取る。積多様体 $S^2 \times S^2$ の向きは

$$(\partial_{u_1}, \partial_{u_2}, \partial_{v_1}, \partial_{v_2})$$

   で表される。曲面 $A = S^2 \times \{p\}$ の接平面の正向き基底は $(\partial_{u_1}, \partial_{u_2})$、曲面 $B = \{q\} \times S^2$ の接平面の正向き基底は $(\partial_{v_1}, \partial_{v_2})$ である。交点符号を判定するためにこの順に並べると

$$(\partial_{u_1}, \partial_{u_2}, \partial_{v_1}, \partial_{v_2})$$

   となり、積向きの基底そのものである。従って比較行列は単位行列で、行列式は $+1$ である。もし二つの曲面の順序を入れ替えれば 4 本の基底の並びは 2 本ずつの交換になり、今回の 4 次元では符号は変わらないが、向きを反転した因子を使えば符号が反転する。

6. $(0,v)\sim(1,-v)$ がメビウスの帯、$(0,v)\sim(1,v)$ が円筒である。前者にはどこでも消えない連続な「正向き」の単位切断を一周整合的に選べない。
7. $s'(t)=e_2(t)$ である。成分の微分だけなら 0 だが、動く基底の微分が残る。接続はこの基底変化を補正する。
8. $s(x)=s(x_0)\exp(-i\int_{x_0}^{x}a(t)dt)$。始点へ戻ると積分が閉曲線積分になり、ホロノミーが得られる。
9. 例えば
$$B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$
と取る。このとき
$$BC=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad CB=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad BC-CB=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\neq 0.$$
従って $A=B\,dx+C\,dy$ なら $A\wedge A=(BC-CB)\,dx\wedge dy$ は非零であり、非可換理論で二次項が必要になる。
10. $f^{-1}(0)=S^1$ で、$df=(2x,2y)$ は円周上で非零だから全射である。$g^{-1}(0)=\{0\}$ では $dg_0=0$ となり、正則値定理を使えない。
11. 核は $\mathrm{span}(0,0,1)$、像は $\mathbb{R}^2$、余核は 0 で、指数は 1 である。
12. 一般点の安定化部分群は自明だが、原点は全回転で固定される。軌道の次元が跳ぶ場所では、商の局所模型も通常のユークリッド空間から外れうる。

確認問題：基本

1. $Q_{S^2\times S^2}$ が双曲形式 H になるよう、二つの因子の類の交点を計算せよ。
2. $*\,e^{13}=-e^{24}$ の符号を、$e^{13}\wedge *\,e^{13}=d\mathrm{vol}$ から確認せよ。
3. エネルギー恒等式から、$k<0$ のときに等号を達成する方程式がどちら側になるかを求めよ。
4. $d_A^{\dagger}d_A=0$ の証明で ASD 条件を使う箇所を特定せよ。
5. 指数が 0 でもモジュライが空または特異になりうる理由を H^0_A, H^2_A で説明せよ。
6. 1 パラメータ モジュライのコンパクト化に余分な境界が出る三つの原因を挙げよ。
7. SW 方程式が可換接続を使いながら非線形である項を二つ挙げよ。
8. Coulomb スライス条件 $d_A^{*}a=0$ が軌道方向への直交条件であることを、L^2 内積で示せ。
9. $X=\mathbb{CP}^2$、$c_2(P)=1$ のとき、ASD 複体の期待次元を計算せよ。
10. $H^2_A\neq 0$ のとき、Kuranishi 写像の値域がなぜ H^2_A になるかを説明せよ。
11. 位相数を一つ落としたバブリング層が、主層（最上位の層）に比べて概略余次元 4 になる理由を説明せよ。
12. $b_2^{+}=1$ で壁越えが起こりうる理由を、1 パラメータ族と余次元の観点から述べよ。

章別確認問題

第 I 部：交点形式と滑らかな構造

13. $\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}^2}$ の交点形式を標準基底で書き、$\mathbb{CP}^2\#\mathbb{CP}^2$ の交点形式と比較せよ。
14. $H=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ がユニモジュラーで 不定値 であることを確認せよ。
15. E_8 格子が偶格子であることと、対角格子 $\langle 1\rangle^{\oplus 8}$ が奇格子であることを比較せよ。
16.「同相でない」と「微分同相ではない」の違いを、滑らかな構造の比較対象を明示して説明せよ。

第 II 部：接続・曲率・反自己双対方程式

17. 局所接続形式 A に対し、曲率 $F_A=dA+A\wedge A$ の二次項がゲージ変換則と両立する理由を一文で説明せよ。
18. 4 次元で $\Lambda^2=\Lambda^2_{+}\oplus\Lambda^2_{-}$ が同じ階数 $3+3$ に分かれることを、$\binom{4}{2}$ から確認せよ。
19. Chern–Weil 数 $\int_X \mathrm{tr}(F_A\wedge F_A)$ が接続の連続変形で変わらない理由を、完全形式という語を使って説明せよ。

20. ASD 方程式が Yang–Mills 方程式を満たすことを、Bianchi 恒等式から説明せよ。

第 III 部：モジュライ空間を作る

21. ゲージ軌道の接空間が $\operatorname{im} d_A$ になることを、無限小ゲージ変換から導け。
22. ASD 変形複体

$$\Omega^0(\mathrm{ad}\ P) \xrightarrow{d_A} \Omega^1(\mathrm{ad}\ P) \xrightarrow{d_A^+} \Omega^2_+(\mathrm{ad}\ P)$$

が複体になるために、どこで $F_A^+ = 0$ を使うかを説明せよ。
23. H^0_A, H^1_A, H^2_A を、それぞれ安定化群、接空間に相当する一次変形、障害という言葉で説明せよ。
24. 期待次元が正でも、実際のモジュライ空間が滑らかな多様体とは限らない理由を述べよ。
25. $X = K3$、$b_1 = 0$、$b_2^+ = 3$、$c_2(P) = 1$ として、単純な ASD 指数公式 $8k - 3(1 - b_1 + b_2^+)$ に代入せよ。
26. Kuranishi 模型で $d\kappa_0 = 0$ でも $\kappa^{-1}(0)$ が線形空間にならない例を一つ作れ。

第 IV 部：コンパクト化と不変量

27. バブリングで失われる情報と、Uhlenbeck コンパクト化が記録する情報を分けて述べよ。
28. エネルギー密度模型 $e_\rho(r) = C\rho^4/(\rho^2 + r^2)^4$ で、$r = \rho s$ と置くと ρ が消える理由を説明せよ。
29. 0 次元モジュライ空間で向きが必要な理由を、符号付き数え上げという言葉で説明せよ。
30. 正次元モジュライ空間で μ-類を挿入する理由を、次元合わせから説明せよ。
31. Donaldson 対角化定理と Donaldson 多項式不変量の出力の違いを、表を使わずに文章で説明せよ。
32. 平滑化可能性の障害と異種滑らかな構造の組の証明で、それぞれ何を仮定し、何を否定するのかを比較せよ。

第 V 部：Seiberg–Witten 理論

33. Spin^c 構造の行列式線束 L が満たす合同条件を述べよ。
34. $q(\Phi)$ が二次写像であること、Clifford 同一視により $i\Lambda^2_+$ の切断として読めること、S^1 ゲージ変換に対して不変であることを説明せよ。さらに A を $\det W^+$ の接続とするとゲージ作用に係数 2 が現れる理由を述べよ。
35. Weitzenböck 公式が SW コンパクト性に効く理由を、$|\Phi|$ の上界という観点から説明せよ。
36. 可約解を避けるために摂動や部屋が必要になる理由を述べよ。
37. Donaldson 理論と SW 理論で、コンパクト性の難しさがどのように違うかを比較せよ。
38. Kähler 曲面上で SW 方程式が複素幾何の方程式へ分解される、という主張を引用定理として使う場合に明示すべき仮定と結論を挙げよ。
39. 随伴不等式が、曲面の種数、自己交点、SW 基本類をどう結びつけるかを言葉で説明せよ。
40. Taubes の SW=Gr を本書で完全証明しない場合、最低限説明すべき証明アーキテクチャを三点挙げよ。

追加確認問題：Donaldson 対角化の一本道

41. 負定値単連結 4 多様体上の $SU(2)$ 束で $c_2(E)[X] = 1$ とする。期待次元が 5 になることを、$b_1 = 0, b_2^+ = 0$ から計算せよ。
42. $E \cong L \oplus L^{-1}$ と分裂する可約接続があるとき、$c_2(E) = 1$ から $c_1(L)^2 = -1$ が出ることを Whitney 積公式で示せ。
43. 負定値ユニモジュラー格子で、長さ -1 の符号対が少なくとも階数個あれば、格子が $-I$ になる理由を説明せよ。

解答指針：基本

1. $A = [S^2 \times \{p\}]$、$B = [\{q\} \times S^2]$ と置く。A と B は (q,p) の一点で横断的に交わり、積の向きと整合させると $A \cdot B = +1$ である。一方、A は第二因子方向へ、B は第一因子方向へ押し出せるので $A^2 = B^2 = 0$。従って基底 (A,B) で交点行列は $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ になる。
2. 向きを e^{1234} で固定する。$e^{13} \wedge e^{24} = e^1 \wedge e^3 \wedge e^2 \wedge e^4 = -e^{1234}$ なので、$e^{13} \wedge (-e^{24}) = e^{1234}$ である。したがって $*\,e^{13} = -e^{24}$ とすれば $\alpha \wedge *\alpha = |\alpha|^2 d\mathrm{vol}$ に合う。

3. 本書の規約では

$$8\pi^2 k = \| F_A^- \|^2 - \| F_A^+ \|^2, \qquad \mathrm{YM}(A) = \| F_A^+ \|^2 + \| F_A^- \|^2$$

である。$k<0$ なら

$$\| F_A^+ \|^2 = \| F_A^- \|^2 - 8\pi^2 k = \| F_A^- \|^2 + 8\pi^2 |k|$$

なので

$$\mathrm{YM}(A) = 2\,\| F_A^- \|^2 + 8\pi^2|k| \geq 8\pi^2|k|.$$

等号は $\| F_A^- \| = 0$、すなわち $F_A^- = 0$ のときに限る。従って $k<0$ では自己双対接続側を使う。$k>0$ では同じ計算で $F_A^+ = 0$ が等号条件である。

4. $d_A^+ d_A \phi = (d_A^2 \phi)^+ = [F_A, \phi]^+$ を計算する段階で ASD 条件を使う。$F_A^+ = 0$ なら $[F_A,\phi]^+ = 0$ である。Bianchi 恒等式 $d_A F_A = 0$ は曲率の恒等式であり、この合成が 0 である理由そのものではない。
5. 指数は $\dim H_A^1 - \dim H_A^0 - \dim H_A^2$ という差である。指数が 0 でも H_A^1 と H_A^2 が同時に非零なら局所解集合は Kuranishi 写像で切られ、空にも特異にもなりうる。H_A^0 が非零なら商にも安定化群由来の特異性が残る。
6. 余分な境界として、可約解が現れる場合、バブリングでエネルギーが点へ逃げる場合、横断性が失敗して期待次元通りのコボルディズムにならない場合がある。1 パラメータ族では、これらが端点以外の境界として数え上げの不変性を壊す。
7. 一つは Dirac 作用素 $D_A\Phi$ の A 依存性で、接続を変えるとスピノルの微分も変わる。もう一つは曲率方程式の $q(\Phi)$ で、$\Phi\Phi^*$ のトレース 0 部分という二次項である。接続が $U(1)$ で可換でも、連成方程式全体は線形ではない。
8. $\langle a, d_A\phi\rangle = \langle d_A^* a, \phi\rangle$ なので、$d_A^* a = 0$ は全ての無限小ゲージ方向 $d_A\phi$ に直交する条件である。実際に e^{ϕ} で $A + a$ を動かすと一次項は $a + d_A\phi$ であり、Coulomb 代表を探す線形方程式は $d_A^* d_A \phi = -d_A^* a$ になる。
9. $b_1 = 0$、$b_2^+ = 1$ なので $8\cdot 1 - 3(1+1) = 2$ である。
10. 無限次元の可解方向は右逆で解けるが、d_A^+ の余核方向だけは線形化で消せないため、その有限次元余核へ射影した方程式が残る。
11. ASD 期待次元を $d(k) = 8k - C$ と書く。ここで $C = 3(1 - b_1 + b_2^+)$ は X にだけ依存する定数である。位相数が一つ落ちた背景解の次元は

$$d(k-1) = 8(k-1) - C = d(k) - 8$$

である。Uhlenbeck 境界では、失われた 1 単位のエネルギーの位置 $x \in X$ をさらに記録するので 4 次元が戻り、概略次元は $d(k) - 8 + 4 = d(k) - 4$ になる。従って主層と比べた余次元は 4 である。これは尺度や内部向きなどを完全に記録する貼り合わせパラメータの次元計算ではなく、Uhlenbeck コンパクト化の境界層が主層より低くなる基本的な見積もりである。
12. 可約の壁が概略余次元 b_2^+ で、$b_2^+ = 1$ では 1 パラメータ経路が一般に壁を横切るからである。

解答指針：章別問題

13. $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ では、$\mathbb{CP}^2$ 側の直線類を h、向き反転側の例外類を e と取ると $h^2 = 1$、$e^2 = -1$、$h\cdot e = 0$ である。従って行列は $\mathrm{diag}(1,-1)$。一方、$\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$ では二つの直線類がどちらも自己交点 $+1$ を持つので $\mathrm{diag}(1,1)$ である。向き反転の有無が符号を変える。
14. $H = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ の行列式は -1 なので、双対格子と一致しユニモジュラーである。固有ベクトル $(1,1)$ の固有値は 1、$(1,-1)$ の固有値は -1 だから不定値である。さらに $Q(a,b) = 2ab$ なので偶形式でもある。
15. E_8 格子では基底の自己交点は 2 で、隣接基底の交差は -1、その他は 0 である。任意の整数結合 $x = \sum a_i e_i$ について $Q(x,x)$ は対角項 $2a_i^2$ と交差項 $2a_i a_j Q(e_i,e_j)$ の和なので偶数になる。対角格子 $\langle 1\rangle^{\oplus 8}$ では基底ベクトルの自己交点が 1 なので奇格子であり、偶奇が整数基底変換で保存されるため両者は同型でない。

16. 同相写像は連続写像と連続逆写像による位相圏の同値であり、滑らかさを見ない。微分同相写像は写像と逆写像が滑らかであることを要求する。異種滑らかな構造では、同じ位相空間としては同相だが、滑らかな座標変換を保つ同値は存在しない。したがって「同相でない」と「微分同相ではない」は結論の強さも使う不変量も違う。

17. ゲージ変換で A は $A^g = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$ と非斉次に変わる。dA だけを曲率とすると dg を含む余分な項が残る。$A \wedge A$ を加えた $F_A = dA + A \wedge A$ ではそれらが相殺され、$F_{A^g} = g^{-1}F_A g$ という共変な変換則になる。

18. 正規直交余標構 $e^1, \dots, e^4$ と向き e^{1234} を取る。ホッジ作用素は

$$*\,e^{12} = e^{34}, \quad *\,e^{13} = -e^{24}, \quad *\,e^{14} = e^{23}$$

および逆向きの三式を満たす。従って自己双対基底は

$$e^{12} + e^{34}, \quad e^{13} - e^{24}, \quad e^{14} + e^{23},$$

反自己双対基底は

$$e^{12} - e^{34}, \quad e^{13} + e^{24}, \quad e^{14} - e^{23}$$

である。これで 6 次元の 2 形式空間が 3 次元ずつに分かれることを、単なる階数計算ではなく実際の基底で確認できる。

19. 接続の経路 A_t に沿って微分すると、$\frac{d}{dt}\operatorname{tr}(F_{A_t} \wedge F_{A_t}) = 2d\operatorname{tr}(\dot{A}_t \wedge F_{A_t})$ となる。右辺は完全形式なので、閉多様体上で積分すると Stokes の定理により 0 である。従って Chern-Weil 数は接続の変形で変わらない。

20. ASD なら $*F_A = -F_A$ である。Yang-Mills 方程式は $d_A^* F_A = 0$ で、$d_A^* = -*\,d_A\,*$ を使うと $d_A^* F_A = -*\,d_A(*\,F_A) = *\,d_A F_A$ となる。Bianchi 恒等式 $d_A F_A = 0$ からこれが消えるので、ASD 解は Yang-Mills 解である。

21. ゲージ変換を $u_t = \exp(t\phi)$ と置き、$t = 0$ で接続の変換式を微分する。局所式では $A^{u_t} = u_t^{-1}Au_t + u_t^{-1}du_t$ なので、一次項は $[A, \phi] + d\phi = d_A\phi$ である。したがってゲージ軌道の接空間は $\operatorname{im} d_A$ になる。二次まで見ると

$$u(A + a) - A = a + d_A\phi + [a, \phi] - \frac{1}{2}[\phi, d_A\phi] + O_{\geq 3}(a, \phi)$$

であり、本文の Coulomb 方程式の符号と同じ規約で整合する。$[\phi, [\phi, a]]$ は ϕ, ϕ, a を含む総次数 3 の項なので、二次までの表示では剰余 $O_{\geq 3}$ に含める。

22. $d_A^+ d_A \phi = (d_A^2\phi)^+ = [F_A, \phi]^+$ であり、ASD 接続では $F_A^+ = 0$ だから消える。これは Bianchi 恒等式ではなく、d_A^2 が曲率との交換子になることと、背景接続が ASD であることを使っている。

23. $H_A^0 = \ker d_A$ は接続 A を動かさない無限小ゲージ変換、つまり安定化群の Lie 代数である。$H_A^1 = \ker d_A^+ / \operatorname{im} d_A$ は方程式を一次まで保つ変形をゲージ方向で割った接空間候補である。$H_A^2 = \operatorname{coker} d_A^+$ は線形化で解けない方程式方向で、非線形 Kuranishi 写像の値域になる。

24. 安定化群が非自明なら、同じ解の近くで商が通常の多様体ではなく固定点を持つ商になる。H_A^2 が非零なら線形化が全射でなく、一次解 H_A^1 の中にさらに $\kappa = 0$ という有限次元方程式が残る。従って期待次元が正でも、実際の局所形は滑らかな空間とは限らない。

25. $b_1 = 0$、$b_2^+ = 3$、$k = 1$ を代入すると $8k - 3(1 - b_1 + b_2^+) = 8 - 3(4) = 8 - 12 = -4$ である。負の期待次元は負次元の空間を意味せず、一般的な摂動では正則解が空になる方向を示す。

26. 例えば $\kappa : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$、$\kappa(x, y) = y^2 - x^3$ は $d\kappa_0 = 0$ だが、零点集合は原点近くで尖点を持つ。線形項が消えても二次・三次項が局所形を決めるため、Kuranishi 零点集合は線形空間とは限らない。

27. バブリングで失われるのは、接続列の滑らかな収束と、縮んでいくインスタントンの尺度・向きなどの細部である。Uhlenbeck コンパクト化は、背景側の低い位相数の解と、エネルギーが集中した点および失われた位相数を記録する。ただし縮んだ内部モジュライの全情報を常に境界点として保持するわけではない。

28. $r=\rho s$ と置くと、4 次元体積要素は r^3dr 型なので $\rho^4 s^3 ds$ を出す。分子は ρ^4、分母 $(\rho^2+r^2)^4=\rho^8(1+s^2)^4$ であり、体積要素の ρ^4 と合わせて ρ^8/ρ^8 が相殺する。したがって総エネルギーは尺度に依らず、密度だけが一点へ集中する。

29. 0 次元モジュライ空間は有限個の点からなる。向きを選ぶと各点の局所符号を $+1$ または -1 と決められ、符号付き和を取れる。向きがなければ点を単に数えるしかなく、1 パラメータ変形で符号反対の点対が生成・消滅する不変性を表現できない。

30. 正次元モジュライ空間 M から数を得るには、$[M]$ と同じ次数のコホモロジー類を評価する必要がある。普遍束 $\mathbb{P}\to X\times\mathcal{B}^*$ から得る典型的な定義は

$$\mu(\alpha)=-\frac{1}{4}p_1(\mathbb{P})/\alpha$$

で、スラント積により $\alpha\in H_i(X)$ は M 上の次数 $4-i$ のコホモロジー類へ送られる。従って点類 $[p]\in H_0(X)$ は次数 4、曲面類 $[\Sigma]\in H_2(X)$ は次数 2 の挿入になる。例えば $\dim M=4$ なら、$\mu([p])$ を一つ入れるか、$\mu([\Sigma_1])\mu([\Sigma_2])$ を入れると 0 次元まで切り下がり、符号付き交点数

$$\langle \mu(\alpha_1)\cdots\mu(\alpha_r),[M]\rangle$$

が定義できる。次数が足りない場合はまだ正次元の集合が残り、次数が大きすぎる場合は一般位置で空になる。

ここで $\mu(\alpha)$ の値が常に整数係数で定義されると無条件に断言してはいけない。実際の定義では、使う束が $SO(3)$ か $SU(2)$ か、普遍束を基点付きゲージ群で作るか、係数環を有理数に広げるかにより、$-\frac{1}{4}p_1$ の整数性の扱いが変わる。本書では次数と挿入の型を本文内で使い、係数の完全な整数性は標準文献の定義条件に従う。

31. Donaldson 対角化定理は、滑らかな閉単連結 4 多様体の定値交点形式が整数上で対角でなければならないという制約を与える。これは形式の実現可能性を排除する定理である。Donaldson 多項式不変量は、モジュライ空間と μ 類を使って滑らかな構造ごとに数や多項式を作り、同じ交点形式を持つ多様体を区別しうる。

32. 平滑化可能性の障害では、位相的多様体 X に滑らかな構造があると仮定し、Donaldson 定理などと矛盾させる。異種滑らかな構造の組では、二つの多様体がどちらも滑らかであること、同相であること、しかし微分同相でないことを別々に示す。前者は「滑らかな構造が存在しない」、後者は「複数存在して区別できる」という主張である。

33. 行列式線束 $L=\det W^+$ は $c_1(L)\equiv w_2(TX)\pmod 2$ を満たす。この合同条件により、Spin^c 構造は任意の線束選択ではなく、接束の第二 Stiefel-Whitney 類を整数類で持ち上げるデータになる。

34. 本書の Clifford 同一視 $\rho: i\Lambda^2_+\cong \mathrm{Herm}_0(W^+)$ の下で $\rho(q(\Phi))=(\Phi\Phi^*)_0$ と読む。位相を掛けても $\Phi\Phi^*$ は変わらないため、S^1 ゲージ変換に対して不変である。u はスピノルに重み 1、行列式に重み 2 で作用するので、A が $\det W^+$ の接続なら $(A,\Phi)\mapsto(A-2u^{-1}du,u\Phi)$ となる。従って A を $A+a$ に変えるとスピノル接続には $\frac{1}{2}a$ が加わり、Dirac 方程式の線形化には $\frac{1}{2}\rho(a)\Phi$ が現れる。別規約の式を使う場合は、この係数 2、Dirac 線形化の係数 $\frac{1}{2}$、曲率方程式の係数を同時に換算する。

35. Weitzenböck 公式は

$$D_A^*D_A\Phi=\nabla_A^*\nabla_A\Phi+\frac{s}{4}\Phi+\frac{1}{2}\rho(F_A^+)\Phi$$

である。SW 解では $D_A\Phi=0$ かつ $F_A^+=q(\Phi)+i\eta$ なので、曲率項には $\frac{1}{2}\rho(q(\Phi))\Phi$ が入る。本書の規約では $\rho(q(\Phi))\Phi=\frac{1}{2}|\Phi|^2\Phi$ であり、四次の正項が出る。$\Delta=d^*d$ と置くと

$$\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2=\langle\nabla_A^*\nabla_A\Phi,\Phi\rangle-|\nabla_A\Phi|^2$$

であり、$|\Phi|^2$ の最大点では $\langle\nabla_A^*\nabla_A\Phi,\Phi\rangle\ge 0$ となる。従って

$$\frac{1}{4}|\Phi|^4 \le \frac{s_-}{4}|\Phi|^2 + C|\eta|\,|\Phi|^2$$

という二次不等式が出る。最大点で $|\Phi|^2 = 0$ なら上界は自明であり、正なら $|\Phi|^2$ で割って $|\Phi|^2 \le C(s_- + |\eta|)$ 型の上界が従う。この上界が曲率方程式を通じて F_A^+ を制御し、さらに Coulomb ゲージと楕円評価で接続の収束部分列を得る入口になる。

36. 可約解では $\Phi = 0$ となり、ゲージ群の安定化群が大きくなる。すると商空間が滑らかな多様体でなくなり、0 次元の符号付き数え上げも安定しない。摂動や部屋の指定は、可約が現れる壁を避けて正則なモジュライ空間を作るために必要である。

37. Donaldson 側では非可換接続のエネルギー集中により、Uhlenbeck コンパクト化とバブリング層の解析が中心になる。SW 側では接続は可換だが、スピノルとの非線形連成があり、Weitzenböck 評価でスピノルと曲率を強く抑えられるため、多くの状況でコンパクト性が扱いやすくなる。簡単なのは「線形だから」ではなく、先験的評価が強いからである。

38. 入力として、Kähler 構造、どの Spin^c 構造を使うか、線束によるひねり、摂動の部屋を明示する必要がある。正準 Spin^c 構造では

$$W^+ = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$$

と書けるが、線束 E でひねると

$$W^+ = (\Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}) \otimes E, \qquad \det W^+ = (K_J^{\mathrm{line}})^{-1} \otimes E^{\otimes 2}$$

になる。Chern 類では $c_1(\det W^+) = -K_X + 2c_1(E)$ である。出力として、SW 解が正則切断・因子・型分解された曲率条件として記述される、という対応を述べる。任意の Spin^c 構造に正準構造の式をそのまま当てはめてはいけない。

39. 非零 SW 不変量を持つ基本類 K と、埋め込まれた連結曲面 Σ に対して、随伴不等式は

$$2g(\Sigma) - 2 \ge \Sigma^2 + |K \cdot \Sigma|$$

という下界を与える。左辺は曲面の種数、右辺は自己交点と基本類とのペアリングである。例えば K3 では基本類 $K = 0$ が非零で、$\Sigma^2 = 2n \ge 0$ なら

$$2g(\Sigma) - 2 \ge 2n \quad \Rightarrow \quad g(\Sigma) \ge n + 1$$

となる。適用には、使う版に応じて $b_2^+ > 1$、$g > 0$、非ねじれ性、自己交点条件などを確認する。

40. 最低限、三つの段階を説明する必要がある。第一に、大きな摂動を入れた SW 方程式でスピノルと曲率の先験的評価を得る。この段階では、スピノルの一成分が大きく、もう一方が小さくなるという漸近を使う。第二に、スピノルの零点集合と曲率集中から、重複度を持つ擬正則曲線またはカレントを取り出す。単一の滑らかな曲線一本が常に出るわけではない。第三に、逆向きに擬正則曲線から近似 SW 解を作り、解析的な貼り合わせで真の解へ補正し、SW 不変量と Gromov 不変量の対応を確立する。完全証明をしない場合でも、どこが引用定理でどこを本文で使うかを分ける。

追加確認問題の解答

41. 負定値なので $b_2^+ = 0$、単連結なので $b_1 = 0$ である。$SU(2)$ 束の低チャージ経路では

$$d = 8c_2(E)[X] - 3(1 - b_1 + b_2^+)$$

を使う。$c_2(E)[X] = 1$ を代入すると

$$d = 8 - 3(1 - 0 + 0) = 5$$

である。この 5 次元性により、4 次元のバブリング端 X と 4 次元の可約リンク $\mathbb{CP}^2$ を同じコボルディズムの境界として比較できる。

42. 分裂 $E \cong L \oplus L^{-1}$ では

$$c(E) = c(L)c(L^{-1}) = (1 + c_1(L))(1 - c_1(L)) = 1 - c_1(L)^2.$$

従って $c_1(E) = 0$、$c_2(E) = -c_1(L)^2$ である。$c_2(E)[X] = 1$ なので

$$\langle c_1(L)^2, [X] \rangle = -1.$$

つまり可約解は交点格子の長さ -1 のベクトルを作る。L と L^{-1} を入れ替えると符号が反転するため、数える対象は $\{\pm c\}$ である。

43. 長さ -1 の二つのベクトル c, d に対し、正定値形式 $-Q$ の Cauchy–Schwarz から $|Q(c,d)| \le 1$ である。等号なら c, d は実数倍で、整数格子内かつ長さ -1 なので $d = \pm c$ である。従って符号対として異なる長さ -1 ベクトルは互いに直交する。階数 r の格子に少なくとも r 個の符号対があれば、ちょうど r 本の直交独立な長さ -1 ベクトルを取れる。これらの張る部分格子の行列式は 1 であり、元の格子もユニモジュラーなので指数は 1 である。したがってそれらは整数基底で、交点行列は $-I_r$ になる。

文献の読み分け

反自己双対方程式、モジュライ空間、Donaldson 不変量の詳細は S. K. Donaldson と P. B. Kronheimer [4]、解析的基礎とコンパクト性は D. S. Freed と K. K. Uhlenbeck [5] を参照する。位相的分類の一次資料は M. H. Freedman [2]、対角化定理は S. K. Donaldson [3]、SW 方程式導入は E. Witten [9]、シンプレクティック幾何への接続は C. H. Taubes [11] である。

厳密性の表示

- 深度 A: 本文内で計算・証明を閉じた。
- 深度 B: 核心を示し、解析の補題のみ付録または文献へ送った。
- 深度 C: 主張、主要補題、難所、論理順序を示した。
- 深度 D: 正確な入力・出力・用途を示して引用した。

深度 D は未証明という意味ではない。証明が本書の前提と規模を越えるため、どの結果をどの形で借りたかを追跡可能にしたという意味である。

参考文献

[1] R. E. Gompf と A. I. Stipsicz, 4-Manifolds and Kirby Calculus. Graduate Studies in Mathematics 20. American Mathematical Society, 1999.

[2] M. H. Freedman,「The Topology of Four-Dimensional Manifolds」, Journal of Differential Geometry, 巻 17, ページ 357–453, 1982, doi: 10.4310/jdg/1214437136.

[3] S. K. Donaldson,「An Application of Gauge Theory to Four-Dimensional Topology」, Journal of Differential Geometry, 巻 18, ページ 279–315, 1983, doi: 10.4310/jdg/1214437665.

[4] S. K. Donaldson と P. B. Kronheimer, The Geometry of Four-Manifolds. Oxford University Press, 1990.

[5] D. S. Freed と K. K. Uhlenbeck, Instantons and Four-Manifolds, 2nd ed. Springer, 1991. doi: 10.1007/978-1-4613-9703-8.

[6] R. Fintushel と R. J. Stern,「Knots, Links, and 4-Manifolds」, Inventiones Mathematicae, 巻 134, 号 2, ページ 363–400, 1998, doi: 10.1007/s002220050268.

[7] T. Perutz,「Lectures on Gauge Theory and Symplectic Geometry」. 参照: 2026 年 10 月 12 日. [オンライン]. 入手先: https://web.ma.utexas.edu/users/perutz/Northwestern/NorthwesternL1.pdf

[8] S. K. Donaldson,「Irrationality and the h-Cobordism Conjecture」, Journal of Differential Geometry, 巻 26, 号 1, ページ 141–168, 1987.

[9] E. Witten,「Monopoles and Four-Manifolds」, Mathematical Research Letters, 巻 1, ページ 769–796, 1994.

[10] J. W. Morgan, The Seiberg-Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds. Mathematical Notes 44. Princeton University Press, 1996.

[11] C. H. Taubes,「SW Implies Gr: From the Seiberg–Witten Equations to Pseudo-Holomorphic Curves」, Journal of the American Mathematical Society, 巻 9, 号 3, ページ 845–918, 1996, doi: 10.1090/S0894-0347-96-00211-1.

[12] P. B. Kronheimer と T. S. Mrowka,「The Genus of Embedded Surfaces in the Projective Plane」, Mathematical Research Letters, 巻 1, 号 6, ページ 797–808, 1994.

[13] M. F. Atiyah と I. M. Singer,「The Index of Elliptic Operators: I」, Annals of Mathematics, 巻 87, 号 3, ページ 484–530, 1968, doi: 10.2307/1970715.

[14] S. Smale,「An Infinite Dimensional Version of Sard's Theorem」, American Journal of Mathematics, 巻 87, 号 4, ページ 861–866, 1965, doi: 10.2307/2373250.